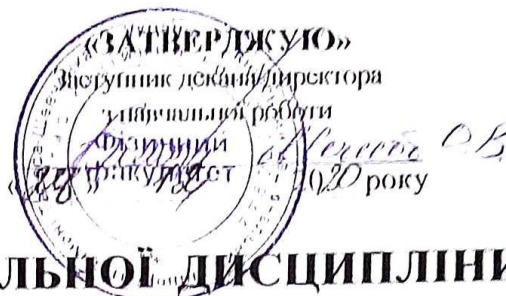


КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Фізичний
(назва факультету)

Кафедра теоретичної фізики



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ¹
Programming in COMSOL Multiphysics, FlexPDE / Програмування в COMSOL
Multiphysics, FlexPDE
(повна назва навчальної дисципліни)

для студентів

галузь знань 10. Природничі науки
(цифр і назва)
спеціальність 104. Фізика та астрономія
(цифр і назва спеціальності)
освітній рівень магістр
(молодший бакалавр, бакалавр, магістр)
освітня програма квантові комп'ютери, обчислення та інформація
(назва освітньої програми)
спеціалізація _____
(за наявності) (назва спеціалізації)
вид дисципліни обов'язкова

Форма навчання	<u>очна</u>
Навчальний рік	<u>2021/2022</u>
Семестр	<u>2</u>
Кількість кредитів ECTS	<u>6</u>
Мова викладання, навчання та оцінювання	<u>англійська</u>
Форма заключного контролю	<u>іспит</u>

Викладачі: Ледней М.Ф.

Пролонговано: на 2022/2023 н.р. Ледней М.Ф. «10» 09 2022р.
(підпис, ПІБ, дата)

на 20__/20__ н.р. (_____) «__» 20__р.
(підпис, ПІБ, дата)

КИЇВ – 2020

Розробник(и): Ледней Михайло Федорович, докт. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри теоретичної фізики

(вказати авторів: ПІБ, науковий ступінь, вчене звання, посада, кафедра)

ЗАТВЕРДЖЕНО

Зав. кафедри теоретичної фізики

Решетняк В.Ю.
(підпис)

(Решетняк В.Ю.)
(прізвище та ініціали)

Протокол № 7 від «24» 12 2020 р.

Схвалено науково - методичною комісією факультету/інституту (педагогічною радою коледжу)

Протокол від «24» 12 2020 року № 36

Голова науково-методичної комісії

Оліх О.І.
(підпис)

(Оліх О.І.)
(прізвище та ініціали)

Голова педагогічної ради (для коледжів)

« _____ » _____ 20__ року

1. Мета дисципліни — ознайомлення студентів з основними концепціями математичного моделювання фізичних явищ, проведення обчислювального експерименту на прикладах із механіки, електродинаміки, оптики, квантової механіки та фізики конденсованого стану в цілому. Засвоєння дисципліни є передумовою для подальшої наукової роботи. У сучасних умовах комп'ютерне моделювання фізичних явищ відіграє суттєву роль у розвитку наукових теорій та розробці технічних пристроїв. Так, кожний науковий співробітник та інженер-дослідник повинен володіти азами сучасних методів математичного моделювання фізичних явищ.

2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:

Знати фізичні та математичні дисципліни на рівні, що відповідає кваліфікації „бакалавр фізики”. Для оволодіння дисципліною необхідні знання з курсів фізики, зокрема „Механіки”, „Електродинаміки”, „Оптики”, „Квантової механіки”, „Термодинаміки і статистичної фізики”.

Вміти застосовувати попередні знання з курсів математичного аналізу, математичної фізики, основ векторного і тензорного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь та курсів теоретичної фізики у задачах математичного моделювання фізичних явищ; ставити задачі математичного моделювання фізичних явищ; принципи роботи і методи програмування у математичних пакетах.

Володіти навичками математичних перетворень, постановки та розв'язування фізичних задач на рівні, що відповідає кваліфікації „бакалавр фізики”; пошуку необхідної довідкової інформації в довідниках фізичних величин і мережі Internet; побудови математичних моделей у сфері професійної діяльності.

3. Анотація навчальної дисципліни:

Нормативна дисципліна “Programming in COMSOL Multiphysics, FlexPDE / Програмування в COMSOL Multiphysics, FlexPDE” є обов'язковою компонентою освітньо-наукової програми “Квантові комп'ютери, обчислення та інформація” циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр фізики” та необхідною для вивчення інших фізичних дисциплін. На сучасному етапі розвитку фізичної науки переважна більшість актуальних задач не піддається розв'язку аналітичними методами теоретичної фізики, і єдиним методом знайти розв'язок, і дослідити поведінку системи в певних умовах є чисельне моделювання задачі з допомогою електронно-обчислювальної техніки. Результати навчання полягають у здатності студентами розв'язувати складні спеціалізовані задачі та вирішувати практичні проблеми, пов'язані з науковими дослідженнями та розробками у галузях природничих наук (фізики, астрономії, математики, механіки, інформатики тощо) із застосуванням сучасних теорій, обчислювальних методів, методів дослідження природних об'єктів та процесів із використанням комплексу міждисциплінарних даних та за умовами недостатності інформації.

Методи викладання: лекції, практичні заняття, самостійна робота студентів.

Методи оцінювання: опитування в процесі занять, контрольні роботи після основних розділів курсу, захист написаних рефератів, іспит. Підсумкова оцінка виставляється на основі проміжних оцінок (40%) та іспиту (60%). Викладається на фізичному факультеті в 2 семестрі на 1 курсі магістратури в обсязі 180 годин (6 кредитів ECTS), з них 30 годин лекцій, 30 годин практичних занять і 120 годин самостійної роботи студентів; складається з 2 змістових модулів (ЗМ); форма підсумкового контролю — іспит.

4. Завдання (навчальні цілі) — розвиток системного методично-обґрунтованого підходу до наукової діяльності; розвиток творчого підходу до розв'язання складних фізичних задач сучасними методами обчислювальної математики з допомогою ЕОМ; сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів – майбутніх фізиків-дослідників. Також здатність

вчитися і оволодівати сучасними знаннями з курсів теоретичної фізики, здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел, в тому числі, електронних ресурсів, та здатність студентів до абстрактного мислення, аналізу та синтезу матеріалу з усіх фізичних дисциплін.

Оволодіння навчальною дисципліною вимагає від студентів поглиблення вже отриманих в межах університетської програми знань за предметами: загальна фізика, методи математичної фізики, обчислювальна математика, теорія ймовірності та основи математичної статистики. У зв'язку зі все більш глибоким впровадженням у науку і техніку комп'ютерного моделювання фізичних явищ. Основні положення дисципліни мають міждисциплінарний характер.

Згідно вимог проекту Стандарту вищої освіти України (другий (магістерський) рівень вищої освіти (восьмий рівень НРК України), галузь знань 10 «Природничі науки», спеціальність 104 «Фізика та астрономія», ОНП "Квантові комп'ютери, обчислення та інформація", дисципліна забезпечує набуття здобувачами освіти наступних *компетентностей*:

інтегральної:

- Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми з фізики у професійній діяльності або у процесі подальшого навчання, що передбачає застосування певних теорій і методів фізики і характеризується складністю та невизначеністю умов.

загальних:

- Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях (ЗК01).
- Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності (ЗК02).
- Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК04).
- Здатність використовувати інформаційні та комунікаційні технології (ЗК05).

фахових:

- Здатність використовувати закони та принципи фізики та астрономії у поєднанні із потрібними математичними інструментами для опису природних явищ (СК01).
- Здатність сприймати новоздобуті знання в області фізики та астрономії та інтегрувати їх із уже наявними, а також самостійно опановувати знання і навички, необхідні для розв'язання складних задач і проблем у нових для себе деталізованих предметних областях фізики й дотичних до них міждисциплінарних областях (СК05).
- Здатність формулювати нові гіпотези та наукові задачі в області фізики, вибирати відповідні методи для їх розв'язання, беручи до уваги наявні ресурси (СК08).
- Вміти використовувати математичний апарат теоретичної фізики, фізичні моделі, прийоми аналізу достовірності фізичних моделей для розв'язання фізичних задач у фотоніці, теоретичній фізиці, комп'ютерних технологіях та для опрацювання квантової інформації (СК10).

5. Результати навчання за дисципліною:

Результат навчання (1. знати; 2. вміти; 3. комунікація; 4. автономність та відповідальність)		Методи викладання і навчання	Методи оцінювання	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
1	1.1 Основні принципи роботи в пакетах Comsol Multiphysics. FlexPDE	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	10
	1.2 Основні принципи вибору моделі, побудови розрахункової області та сітки.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	10
	1.3 Основні способи візуалізації результатів обчислень	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	10
	1.4 Загальні числові методи вирішення алгебраїчних та диференціальних рівнянь	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	10

2	2.1 Вибирати або будувати математичну модель та вибирати вирішувач у залежності від умов задачі.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	7,5
	2.2 Правильно враховувати початкові і межові умови в задачах різної геометрії та розмірності.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	7,5
	2.3 Аналізувати отримані результати числових розрахунків на предмет достовірності.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	7,5
	2.4 Практично моделювати в пакетах Comsol Multiphysics та FlexPDE академічні задачі із курсів фізики.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	7,5
3	3.1 Пояснити розв'язування задач ЗМ1 та ЗМ2.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	15
	3.2 Демонструвати спілкування в діалоговому режимі з колегами, ведення професійної наукової дискусії.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	7,5
	3.3 Письмово відображувати та презентувати результати своїх досліджень.	Лекція, практичне заняття, самостійна робота	Домашні завдання, усні відповіді, контрольна робота	7,5

6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання (необов'язково для вибіркових дисциплін)

Результати навчання дисципліни	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1	3.2	3.3
Програмні результати навчання											
1. РН04. Вибирати та використовувати відповідні методи обробки та аналізу даних в фізичних дослідженнях і оцінювання їх достовірності.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2. РН06. Обирати ефективні математичні методи та інформаційні технології та застосовувати їх для здійснення досліджень та інновацій в області фізики.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3. РН12. Розробляти та застосовувати ефективні алгоритми та спеціалізоване програмне забезпечення для дослідження моделей фізичних та астрономічних об'єктів і процесів, обробки результатів експериментів і спостережень.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4. РН13. Створювати фізичні, математичні і комп'ютерні моделі природних об'єктів та явищ, перевіряти їх адекватність, досліджувати їх для отримання нових висновків та поглиблення розуміння природи, аналізувати обмеження	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
5. РН20. Проводити комп'ютерні розрахунки при дослідженні фізичних явищ квантової інформатики у фотоніці та наноелектроніці.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

7. Схема формування оцінки:

7.1 Форми оцінювання студентів: (зазначається перелік видів робіт та форм їх контролю / оцінювання із зазначенням *Min.* – рубіжної та *Max.* кількості балів чи відсотків)

- семестрове оцінювання

Під час **поточного** контролю (ПК) розуміння матеріалу дисципліни перевірятиметься шляхом розв'язування задач, які будуть задані на самостійну роботу. Розв'язки цих задач будуть обговорюватися, аналізуватися та перевірятися на практичних заняттях. Виконання завдань повинно бути свідомим, копіювання робіт інших студентів не зараховується. За виконання всіх завдань змістових модулів протягом семестру студент може отримати наступні бали:

1. Модульна контрольна робота №1 — 10 балів.
2. Модульна контрольна робота № 2 — 10 балів.
3. Самостійна робота над задачами протягом семестру — 15 балів.
4. Реферати, доповіді, усні відповіді — 5 балів.

- підсумкове оцінювання у формі іспиту

Підсумковий семестровий контроль проводиться у формі **іспиту**. Оцінка виставляється за результатами письмових робіт. Під час іспиту оцінюються загальні результати вивчення всього навчального курсу.

	ЗМ1	ЗМ2	іспит	Підсумкова оцінка
<i>Мінімум</i>	<u>12</u>	<u>12</u>	<u>36</u>	<u>60</u>
Максимум	<u>20</u>	<u>20</u>	<u>60</u>	<u>100</u>

На іспиті студент може максимально отримати **60 балів**. Оцінка за іспит не може бути меншою **36 балів** для отримання загальної позитивної оцінки за курс.

Студент не допускається до іспиту, якщо під час семестру набрав менше **24 балів**. Умови допуску до іспиту наступні:

- здати розв'язок не менше 50 % обов'язкових задач, що виносяться на самостійну роботу;
- пройти письмову перевірку знань та розумінь основних означень та формул.

7.2 Організація оцінювання: (обов'язково зазначається порядок організації передбачених робочою навчальною програмою форм оцінювання із зазначенням орієнтовного графіку оцінювання).

Контроль здійснюється за модульно-рейтинговою системою, яка складається із 2 змістових модулів. Система оцінювання знань включає поточний, модульний та семестровий контроль знань. Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100-бальною шкалою. Форми поточного контролю: оцінювання домашніх робіт, письмових самостійних завдань, тестів та контрольних робіт, виконаних студентами під час практичних занять. Студент може отримати максимально 20 балів за виконання домашніх робіт, самостійних завдань, усні відповіді, тести, реферати, доповіді, доповнення на практичних заняттях. Модульний контроль включає 2 модульні контрольні роботи. Студент може отримати максимально за модульні контрольні роботи 20 балів (по 10 балів за кожен модульну контрольну роботу). Підсумковий семестровий контроль проводиться у формі іспиту в другому семестрі (60 балів). Екзаменаційний білет включає 1 теоретичне питання (10 балів) та 2 завдання (по 25 балів кожне).

7.3 Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59

8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій, практичних занять та самостійних робіт

II СЕМЕСТР

№ теми	Тема	Кількість годин		
		лекції	Практичні заняття	СРС
ЗМ1. Основи програмування в Comsol Multiphysics, FlexPDE				
1	Topic 1. Finite element method. Concentration of the method, advantages and disadvantages, types of finite elements, breaking the area into finite elements. / Метод скінченних елементів. Концепція методу, переваги і недоліки, типи скінченних елементів, розбиття області на скінченні елементи.	1		3
2	Topic 2. Getting started with FlexPDE. Installation, general principles of operation, applied modes, the process of setting and solving the problem. / Початок роботи з FlexPDE. Встановлення, загальні принципи роботи, прикладні режими, процес постановки і вирішення задачі.	1		3
3	Topic 3. Getting started with Comsol Multiphysics. Installation, general principles of work, applied modes, the process of setting and solving a problem. / Початок роботи з Comsol Multiphysics. Встановлення, загальні принципи роботи, прикладні режими, процес постановки і вирішення задачі	1		3
4	Topic 4. Comsol Multiphysics Environment, Model Creation. Model navigator, selection of a type of process modeled by a template. The working environment of the program. / Середовище програми Comsol Multiphysics, Створення моделі. Навігатор моделей, вибір різновидності процесу, що моделюється шаблоном. Робоче середовище програми.	1	1	3
5	Topic 5. Construction of the computational domain. Building an area using Comsol Multiphysics, building an area in specialized programs and importing it into Comsol Multiphysics. / Побудова розрахункової області. Побудова області засобами Comsol Multiphysics, побудова області в спеціалізованих програмах та її імпорт в Comsol Multiphysics.	1	1	4
6	Topic 6. Forms of equations. General information, applied modes, coefficient form of equations, general form, weak form. / Форми рівнянь. Загальні відомості, прикладні режими, коефіцієнтна форма рівнянь, генеральна форма, слабка форма.	1	1	4
7	Topic 7. Setting the parameters of the problem, initial and boundary conditions. Setting global constants, expressions, functions, material properties, initial and boundary conditions / Задання параметрів задачі, початкових і межових умов. Задання глобальних сталих, виразів, функцій, властивостей матеріалів,	1	1	4

	початкових і межових умов			
8	Topic 8. Meshing. Mesh types and properties, imposition of several types of meshes on one area. / Побудова сітки. Типи і властивості сітки, накладання декількох типів сіток на одну область	1	1	4
9	Topic 9. Solvers and their characteristics. Calculation types. Setting and using solvers. Setting up calculation types and methods. Calculation errors. / Вирішувачі та їх характеристики. Типи розрахунків. Задання і використання вирішувачів. Налаштування типів розрахунку і методів. Помилки розрахунку.	1	1	4
10	Topic 10. Visualization of results. Building the main graph, exporting the graph to a file, building graphs on sections and points, building graphs on the boundaries and at key points of the area. / Візуалізація результатів. Побудова головного графіка, експорт графіка в файл, побудова графіків на перерізах і точках, побудова графіків на межах і в ключових точках області.	1	1	4
11	Topic 11. Processing of the received data. Built-in Comsol Multiphysics capabilities for analyzing numerical simulation results. / Обробка отриманих даних. Вбудовані можливості Comsol Multiphysics для аналізу результатів числового моделювання.	1	1	6
12	Topic 12. Simulation of stationary and non-stationary tasks. Problem statement, solution, solution visualization, consideration of initial and boundary conditions. / Моделювання стаціонарних і нестаціонарних задач. Постановка задачі, вирішення, візуалізація розв'язку, врахування початкових та межових умов.	2	1	6
13	Topic 13. Solving eigenvalue problems and problems with parameters. / Вирішення задач на власні значення та задач з параметрами.	1	2	6
14	Topic 14. Solving problems of acoustics and hydrodynamics. / Вирішення задач акустики та гідродинаміки.	2	1	6
15	Topic 15. Solving problems in mechanics. / Вирішення задач механіки.	1	2	6
	Модульна контрольна робота № 1		2	
ЗМ2. Практичне моделювання в Comsol Multiphysics, FlexPDE				
16	Topic 16. Solving problems of optics. / Вирішення задач оптики.	1	2	6
17	Topic 17. Solving problems of electrodynamics. / Вирішення задач електродинаміки.	2	2	6
18	Topic 18. Solving problems of quantum mechanics. / Вирішення задач квантової механіки.	1	2	6
19	Topic 19. Implementation of multiphysics mode. / Реалізація мультифізичного режиму.	1	1	6
20	Topic 20. Solving problems with changing geometry. / Вирішення задач із змінною геометрією.	1	1	6
21	Topic 21. One-dimensional tasks. One-dimensional Korteweg-de Vries equation. / Одновимірні задачі. Одновимірне рівняння Кортвега-де Фріза.	2	1	6
22	Topic 22. Three-dimensional tasks. Solution of Poisson's equation. / Тривимірні задачі. Вирішення рівняння Пуассона.	2	1	6
23	Topic 23. Comsol Multiphysics communication with Matlab. Collaboration launch. / Зв'язок Comsol Multiphysics з Matlab. Запуск одночасної роботи.	2	1	6

24	Тopic 24. Model Builder. / Конструктор моделі "Model Builder".	1	1	6
	Модульна контрольна робота № 2		2	
Всього		30	30	120

Загальний обсяг 180 год., в тому числі (вибрати необхідне):

Лекцій – 30 год.

Семінари – год.

Практичні заняття - 30 год.

Лабораторні заняття - ____ год.

Тренінги - ____ год.

Консультації - ____ год.

Самостійна робота – 120 год.

9. Рекомендована література:

Основна

1. Сайт компанії розробника пакета COMSOL Multiphysics [Електронний ресурс] / www.comsol.com. Режим доступу: <http://www.comsol.com/>, вільний.
2. Вікіпедія вільна енциклопедія [Електронний ресурс] / wikipedia.org. Електрон. дан. Б.м., 2009. Режим доступу: <http://wikipedia.org/>, вільний.
3. Melosh R.J. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness method // J. Am. Inst. For Aeronautics and Astronautics. 1965. №1. P.1631–1637.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 393 с.
5. Сайт компанії розробника пакета MATLAB [Електронний ресурс] / www.mathworks.com. Режим доступу: <http://www.mathworks.com/>, вільний.
6. Hindmarsh A.C., Brown P.N., Grant K.E., Lee S.L., Serban R., Shumaker D.E. and Woodward C.S. SUNDIALS: Suite of Nonlinear and Differential/Algebraic Equation Solvers // ACM T. Math. Software 2005. V. 31. P. 363.
7. Brown P.N., Hindmarsh A.C. and Petzold L.R. Using Krylov methods in the solution of large-scale differential-algebraic systems // SIAM J. Sci. Comput. 1994. V. 15. P. 1467–1488.
8. Chung J., Hulbert G.M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method // J. Appl. Mech. 1993. V. 60. P. 371–375.
9. Jansen K.E., Whiting C.H., Hulbert G.M. A generalized- α method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. V. 190. P. 305–319.
10. Лабораторія інформатики і паралельних обчислень [Електронний ресурс] / graal.ens-lyon.fr, Режим доступу: <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/>, вільний.
11. Проект PARDISO [Електронний ресурс] / www.pardiso-project.org, Режим доступу: <http://www.pardiso-project.org/>, вільний.
12. Сховище NETLIB [Електронний ресурс] / www.netlib.org, Режим доступу: <http://www.netlib.org/linalg/spooles>, вільний.
13. Greenbaum A. Iterative Methods for Linear Systems. Frontiers in Applied Mathematics. 17. SIAM. 1997. 220p.
14. Saad Y. and Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1986. V. 7. P. 856–869.
15. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston, 1996. 529 p.
16. Saad Y. A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1993. V. 14. P. 461–469.
17. Van Der Vorst H.A. A fast and smoothly converging variant of Bi- CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1992. V. 13. P. 631–644.
18. Hestenes M.R. and Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems // J. Res. Nat. Bur. Standards 1952. V. 49. P. 409–435.

19. Lanczos C. Solutions of linear equations by minimized iterations // J. Res. Nat. Bur. Standards. 1952. V. 49. P. 33–53.
20. Лионе Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588с.
21. Кружков С.Н. Фаминский А.В. Обобщенные решения для уравнения Кортевега-де Фриза // Матем. сборник. 1983. Т. 120(162). С. 396–445.
22. Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys.Rev.Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
23. Шабат А.Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза // ДАН СССР. 1973. Т. 211. С. 1310–1313.

Додаткова

1. Амосов А.А, Дубинський Ю.А, Копченова Н.В. Обчислювальні методи для інженерів: Учеб. посібник. - М.: Вищ. шк., 1994. - 544 с.
2. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов.- М.: Мир, 1981. - 305 с ..
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.:Мир, 1979. -392 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. -М.: Мир, 1975. - 318 с.
5. Деклу Ж. Метод конечных элементов. - М.: Мир, 1976. - 96 с
6. Соболев И.М. Численный метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1984.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.:Наука, 1987.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
9. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986.
10. Годунов С.К., Рябенский В.С. Численные схемы уравнений математической физики. – М.: Наука, 1989.
11. Марчук Г.И. Методы расщепления. – М.: Наука, 1988.
12. Каханер Д., Моулдер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
13. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. – К.: Вища школа, 1995.
14. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
15. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.