

# МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

## Питання для підготовки до іспиту<sup>1</sup>

Питання з першого семестру (обов'язкові для тих, хто не здавав теорію на заліку)

1. Хвильове рівняння і його властивості, хвильове поле. Загальна класифікація диференціальних рівнянь. Фізичні системи, описувані хвильовим рівнянням: одновимірне пружне середовище, коливання струни, приклади з механіки суцільного середовища й електродинаміки. Фізичний смисл хвильового поля, його похідних і хвильового рівняння у різних моделях. Інші лінійні рівняння, що описують хвилі, закон дисперсії.
2. Межові умови до хвильового рівняння I, II і III роду та їх фізичний смисл у різних моделях, однорідні й неоднорідні межові умови.
3. Рівняння у частинних похідних (РЧП) і задача для РЧП. Класичний розв'язок диференціального рівняння. Коректно поставлена задача для РЧП, приклади некоректно поставлених задач із курсу. Перша крайова задача для хвильового рівняння на відріжку, межові та початкові умови, вимоги до розв'язку задачі. Дані задачі й вимоги до них. Фізична постановка задачі та співвідношення між фізичною і математичною постановками.
4. Хвильове поле у резонаторі. Основна допоміжна задача методу відокремлення змінних. Процедура відокремлення змінних, задача Штурма-Ліувілля, власні моди та їх фізичний смисл. Моди найпростіших одновимірних резонаторів. Перевірка правильності знаходження власних функцій, використання осциляційної теореми.
5. Задача про вільні коливання поля у резонаторі при заданих початкових умовах. Постановка задачі, загальний (формальний) розв'язок, формальна процедура задоволення початкових умов. Ортогональність власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. Ряд Фур'є за системою ортогональних функцій.
6. Рівняння теплопровідності. Дифузія на прямій, густина дифузійного потоку частинок, баланс кількості частинок і рівняння неперервності. Рівняння дифузії і теплопровідності, їх можливі узагальнення.
7. Постановка задач для рівняння теплопровідності, загальні властивості розв'язків одновимірного однорідного рівняння.
8. Рівняння Лапласа і Пуассона. Фізичні системи, описувані цими рівняннями, і крайові умови до них. Задачі Діріхле і Неймана, умови існування розв'язку і теореми єдиності розв'язку.
9.  $(2x^2)$  Принцип суперпозиції у лінійних задачах МФ: поле і його джерела, характер зв'язку між ними. Розкладання розв'язку на складові за видами джерел поля, зведення загальної задачі до задач з окремими видами джерел. Методи розв'язання задач математичної фізики як варіанти реалізації принципу суперпозиції (*самостійно підібрати приклади з лекцій і практичних занять*).
10. Метод частинних розв'язків, взаємозв'язки між задачами з різними видами джерел, перетворення одних задач в інші. Приклади застосування різних типів (*самостійно підібрати приклади з практичних занять*).
11. Метод розкладання за власними функціями, нормальні координати поля. Два варіанти його реалізації на прикладі задач для хвильового рівняння на відріжку з неоднорідними межовими умовами і з неоднорідним рівнянням.

<sup>1</sup> Питання у білетах охоплюють той же матеріал, але можуть бути сформульовані інакше.

<sup>2</sup> Питання позначені таким чином зустрічаються у білетах більше одного разу.

12. Метод характеристик. Загальний розв'язок одновимірного хвильового рівняння та його фізична інтерпретація як суперпозиції хвиль з протилежними напрямками поширення, основні властивості хвиль у даній моделі, їх зв'язок з властивостями моделі. Модова і хвильова картини поля.
13. Задача про вільні коливання нескінченної струни. Постановка задачі, формула Даламбера, її фізична інтерпретація, фазова площина, характеристичний трикутник, причинність, поняття про світловий конус.
14. Збереження парності для нескінченної струни і метод непарного продовження для півнескінченної струни, його застосування до інших рівнянь і задач, приклади (*підібрати самостійно*).
15. Класифікація диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП). Рівняння гіперболічного, параболічного й еліптичного типів, алгоритм приведення їх до канонічного вигляду.

#### Питання з першого і другого семестрів, які здають усі

16. Інтегральне перетворення Фур'є (ШФ), умови його застосовності та властивості. Розв'язання диференціальних задач за допомогою ШФ. Приклад застосування: задача про поширення тепла на необмеженій прямій, особливості її постановки та розв'язок у вигляді інтеграла Фур'є.
17. Функція Гріна (ФГ) одновимірної задачі про поширення тепла на необмеженій прямій: означення, явний вигляд, властивості, зв'язок з дельта-функцією і фізичний смисл.
18. Приклади ФГ одновимірних задач, розв'язаних методом відокремлення змінних і методом характеристик.
19. Представлення вкладів у розв'язок від джерел різних типів через функцію Гріна. Задача на функцію Гріна, ФГ як узагальнений розв'язок крайової задачі.
20. Інтегральне перетворення Лапласа і його властивості. Означення і механізм дії на прикладі функції  $f(t) = e^{\beta t}$ , аналітичні властивості зображення, приклади зображень окремих функцій. Спільне й відмінне між перетвореннями Лапласа і Фур'є і зв'язок між ними.
21. Приклад застосування перетворення Лапласа: функція Гріна хвильового рівняння на необмеженій прямій.
22. Розв'язання крайових задач з неоднорідними межовими умовами методом Дюамеля, поверхневі функції Гріна (приклад застосування перетворення Лапласа).
23. Відокремлення змінних у рівнянні Лапласа у полярних координатах. Власні функції оператора Лапласа на одиничному колі. Частинні розв'язки та загальний розв'язок рівняння Лапласа в полярних координатах. Задача Діріхле для круга.
24. Відокремлення змінних у рівнянні Лапласа у сферичних координатах. Сферичні функції як власні функції оператора Лапласа на одиничній сфері. Частинні розв'язки і загальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичній СК.
25. Хвильове рівняння і рівняння Гельмгольца. Відокремлення змінних у рівнянні Гельмгольца в полярних координатах. Диференціальне рівняння Бесселя та його розв'язки. Частинні розв'язки рівняння Гельмгольца у полярних координатах.
26. Рівняння Шредингера для вільної частинки і рівняння Гельмгольца. Відокремлення змінних у рівнянні Гельмгольца у сферичних координатах, сферично-симетричний і загальний випадки. Сферичні функції Бесселя, їх

**властивості, асимптотичний вигляд для великих значень аргументу. Частинні розв'язки рівняння Гельмгольца у сферичних координатах.**

27. Диференціальні рівняння для спеціальних функцій, загальні властивості. Особливі точки диференціальних рівнянь, поведінка розв'язків диференціального рівняння в околі особливих точок на дійсній осі й у комплексній площині. Постановка крайових задач для диференціальних рівнянь з особливими точками. *Підібрати конкретні приклади з курсу.*
28. (2x) **Хвильове рівняння і рівняння Гельмгольца. Диференціальне рівняння Бесселя. Поведінка розв'язків при малих і великих значеннях аргументу (якісний аналіз рівняння). Розв'язок у вигляді узагальненого степеневому ряду та наслідки з нього. Функція Бесселя, формули диференціювання й інтегрування, рекурентні співвідношення, графіки функцій Бесселя.**
29. Фундаментальна система розв'язків рівняння Бесселя. Функція Неймана і функції Ханкеля, особливості їх властивостей і застосування. Частинні випадки та графіки циліндричних функцій.
30. Перша й друга інтегральні формули Гріна та наслідки з них. Рівняння Лапласа і Пуассона, фізичні системи, що описуються цими рівняннями, крайові умови до цих них. Теорема Гауса. Задачі Діріхле і Неймана для рівнянь Лапласа і Пуассона, умови існування розв'язку і теореми єдиності, фізична інтерпретація особливостей задачі Неймана для різних моделей.
31. (2x) Загальні властивості власних функцій оператора Лапласа, узагальнення на еліптичні оператори загальнішого вигляду. Одновимірною задачею Штурма-Ліувілля у загальній постановці, ортогональність її власних функцій з вагою. Ортогональність функцій Бесселя як наслідок властивостей оператора Лапласа.
32. Інтегральне представлення Бесселя і твірною функцією. Приклади їх застосування (підібрати самостійно).
33. (2x) Асимптотичний вигляд функції Бесселя  $J_0(x)$  при великих значеннях аргументу. Асимптотики циліндричних функцій і сферичних функцій Бесселя. Фізична інтерпретація циліндричних функцій як циліндричних хвиль.
34. (2x) Поняття про асимптотичні ряди. Приклад розвинення, яке приводить до асимптотичного ряду і його смисл. Означення асимптотичного ряду, порівняння асимптотичних рядів зі степеневими, Властивості асимптотичних рядів, асимптотичні ряди більш загального вигляду.
35. Модифіковані функції Бесселя. Аналогія із синусами і косинусами та гіперболічними функціями. Задачі для РЧП, які приводять до модифікованих функцій Бесселя. Диференціальне рівняння для модифікованих функцій Бесселя, аналіз поведінки його розв'язків, спільне й відмінне від поведінки розв'язків рівняння Бесселя, зв'язок між розв'язками цих рівнянь. Означення модифікованих функцій Бесселя I і II роду, поведінка в нулі і на нескінченності. Графіки модифікованих функцій Бесселя. Модифіковані й звичайні функції Бесселя (включно із сферичними) у задачах квантової механіки (навести приклади розв'язків у класично дозволених і класично заборонених областях).
36. Поліноми Ерміта. Твірною функцією, диференціальна формула, елементарні властивості та графіки. Диференціальне рівняння для поліномів Ерміта і спектральна задача, обґрунтування необхідності обриву ряду. Ортогональність і норма.
37. Стационарні стани одновимірного квантового гармонічного осцилятора у координатному представленні, функції Ерміта, графіки хвильових функцій стационарних станів.

38. Поліноми Лагерра, їх основні властивості і спектральна задача для них (без виводу), вироджене гіпергеометричне рівняння.
39. (2х) Квантовомеханічні задачі, розв'язки яких виражаються через поліноми Лагерра. Двовимірний гармонічний осцилятор у полярних координатах, функції Гаусса-Лагерра. Спектр і радіальні хвильові функції дискретного спектру атома водню, їх структура й ортогональність.
40. (2х) Поліноми Лежандра. Твірна функція. Формула Родріга. Елементарні властивості та графіки. Диференціальне рівняння і постановка крайової задачі. Ортогональність і обчислення квадрата норми.
41. Спектральна задача на поліноми Лежандра. Необмежені і регулярний розв'язки рівняння в околі окремої особливої точки. Обґрунтування необхідності обриву ряду. Повнота системи ортогональних многочленів на скінченному проміжку.
42. (2х) Розклад потенціалу точкового заряду по поліномах Лежандра та його особливості. Симетрія рівняння Лапласа і його розв'язки, перетворення обернених радіусів.
43. Похідні поліномів Лежандра, приєднані функції Лежандра та їх зв'язок із задачею на власні функції кутової частини оператора Лапласа у сферичних координатах.
- 44. (2х) Сферичні функції (СФ). Явний вигляд, ортогональність і нормування. СФ як спільна система власних функцій кількох операторів, зв'язок з квантовою механікою, теорема додавання для СФ (без доведення). Частинні випадки СФ. Фізична інтерпретація СФ як хвиль на сфері. Стационарні стани атома водню, які відповідають круговим орбітам.**
45. Узагальнені функції, дельта-функція, поняття слабкої границі, приклади представлень дельта-функції через слабку границю.
46. Представлення дельта-функції інтегралом Фур'є та рядом Фур'є, швидко осцилюючі функції. Диференціювання узагальнених функцій, розривні функції і дельта-функція.
47. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа. Класичні й узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь і задач. Основна інтегральна формула Гріна та наслідки з неї, теорема про середнє для гармонічних функцій, принцип максимуму<sup>3</sup> (без доведення).
48. Метод функцій Гріна для рівнянь еліптичного типу. Функція Гріна задачі Діріхле, представлення розв'язків задачі з однорідними і неоднорідними межовими умовами. Узагальнення на еліптичні оператори загальнішого вигляду.

Структура білета:

1. Питання з числа виділених жирним шрифтом (14 балів).
2. Питання з числа не виділених жирним шрифтом (8 балів).
3. Задача (18 балів, за бажанням зараховується результат підсумкової контрольної, якщо він позитивний).

Всього до 40 балів за екзамен, загальний результат 2 семестру з екзаменом – до 100.

За бажанням за питання №№1-15 з першого семестру зараховується результат заліку, якщо він перевищує 74 бали (з вагою 0,14).

*Підготував доц. В. Хотяїнцев*

---

<sup>3</sup> Див. підручники з МФ, наприклад, Тихонов, Самарский.