Завдання до іспиту з курсу

«Програмування в COMSOL Multiphysics, FlexPDE»

Стаціонарні задачі.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, якщо ліва сторона її підтримується при температурі T_1, права – при температурі T_2, верхня - при нульовій температурі, а нижня теплоізольована.
2. Знайти електростатичний потенціал всередині області, обмеженої провідними пластинами $y = 0, y = b, x = 0$, якщо пластина $x = 0$ заряджена до потенціалу $V(y)$, а інші - заземлені. Заряди всередині області відсутні.
3. Знайти стаціонарний розподіл температури в тонкій однорідній прямокутній пластині, яка однорідно по площі нагрівається стаціонарним зовнішнім джерелом заданої потужності, якщо температура країв пластини підтримується рівною T_0.
4. Знайти розподіл електростатичного потенціалу в нескінченній смузі $0 \le x \le l$, $-\infty < y < \infty$, на лівій стороні якої потенціал дорівнює нулю, а на правій приймає значення $\varphi(y) = A(1 - e^{-\alpha y})$. Вибрати розмір області по y в залежності від величини параметру α.
5. Знайти розподіл електростатичного потенціалу всередині прямокутного паралелепіпеда з провідними стінками, якщо його бічні грані та верхня основа заземлені, а нижня основа заряджена до потенціалу $V(x, y)$.
6. Розв'язати рівняння Лапласа всередині кругового сектора $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$, якщо на стороні $\rho = a$ потенціал приймає значення $f(\varphi)$, а на інших − нульове значення.
7. Розв'язати рівняння Лапласа всередині кругового сектора $0 \le \rho \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$, якщо на стороні $\varphi = 0$ потенціал приймає значення $f(\rho)$, а на інших − нульове значення.
8. На плоскій поверхні землі встановлений довгий ангар, що має форму половини циліндра радіусом a (циліндр розділено по площині, що проходить через його вісь). Перпендикулярно осі ангара в горизонтальному напрямку дме вітер зі швидкістю v_0. Вважаючи його потоком ідеальної нестисливої рідини, знайти розподіл потенціалу швидкості потоку та поле швидкостей. Потенціал пов'язаний з полем швидкостей співвідношенням $\vec{v} = \vec{\nabla} u$ і задовольняє рівняння Лапласа.
9. Знайти електростатичний потенціал, що задовольняє рівняння Пуассона $\Delta u = -\frac{4x^3}{\rho^7}$ в області, що є зовнішньою до круга радіуса a, якщо на межі області нормальна складова напруженості поля дорівнює нулю, а на нескінченності потенціал прямує до нуля.
10. Радіус однорідного циліндра a, висота h; його бічна поверхня підтримується при нульовій температурі, а верхня основа теплоізольована. Знайдіть розподіл температури, що встановися у циліндрі, якщо на нижній основі підтримується заданий розподіл температури $f(\rho)$.
11. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластині, дві суміжні сторони якої підтримуються при температурі T_1, а через дві інші подаються теплові потоки I_a та I_b відповідно.

Задачі, що містять величини залежні від часу.

Підібрати параметри самостійно. Прописати розмірності (за потреби).

1. Знайти розподіл температур у товстостінній трубі (внутрішній радіус дорівнює a, зовнішній $- b$), якщо через її внутрішню поверхню подається рівномірно розподілений тепловий потік густиною j_1, а через зовнішню $- j_2$. Початкова температура труби T_0.

2. Знайти поле температур та його зміну з часом всередині однорідної кулі радіуса a, яка мала температуру $T_0(r)$, а з початкового моменту часу на її поверхні підтримується стала температура T_1.
3. Знайти розподіл температури і густини потоку тепла в циліндрі висотою H, якщо його радіус змінюється вздовж стержня за законом $r(z) = r_0 exp(-\alpha z)$, бічна поверхня теплоізольована, через нижню поверхню подається сталий тепловий потік I, а верхня підтримується при сталій температурі T_0 , що дорівнює температурі стержня при $t = 0$.
4. Ліва сторона пластини $0 \leq x \leq l, -d \leq y \leq d$ підтримується при температурі T_1, інші сторони — теплоізольовані. Знайти розподіл температур в пластині при $t > 0$, якщо в початковий момент часу розподіл температур вздовж стержня був таким: $T_2 + T_0 sin(\pi x/2l)$.
5. Однорідне середовище обмежене нескінченною циліндричною поверхнею радіуса a. Через поверхню подається неоднорідно розподілений стаціонарний тепловий потік заданої величини, причому в напрямі осі циліндра густина потоку є сталою. Знайти розподіл температури в середовищі, якщо початкова температура T_0.
6. Однорідний тонкий диск радіуса a, що мав температуру T_0 при $t = 0$, однорідно по площі нагрівається стаціонарним потоком світла інтенсивності I, яке повністю поглинається диском. Знайти зміну поля температур у диску при $t > 0$, якщо край диска підтримується при температурі T_0.
7. Ліва сторона пластини $0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq d$ теплоізольована, інші сторони підтримуються при температурі T_1. Знайти розподіл температур в пластині при $t > 0$, якщо в початковий момент часу розподіл температур був $T_0 exp(-x^2/l^2)$.
8. Коливання стержня змінної жорсткості. Тонкий стержень $a \leq x \leq b$ виготовлений з неоднорідного матеріалу, так що модуль Юнга змінюється вздовж стержня за законом $E = \alpha(x - x_0)^2$, де x_0 - деяка точка, що лежить поза межами стержня. Густина матеріалу ρ та площа перерізу стержня постійні. розв'язати задачу про коливання стержня, якщо початкова швидкість $\varphi(x) = 2v_0 \cos^2(\pi x/l)$, а початкове відхилення дорівнює нулю, а: а) обидва кінці стержня закріплені нерухомо; б) один кінець закріплений нерухомо, а інший - вільний.
9. Знайти коливання струни $0 \leq x \leq l$ лівий кінець якої закріплений, а правий вільний, при t >0 під дією розподіленої сили $f(x,t) = f(x) cos\omega t$. При $t = 0$ струна перебувала в положенні рівноваги. Розглянути частинний випадок $f(x) = f_0$.
10. Знайти коливання пружного стержня, якщо правий кінець його закріплений нерухомо, а до лівого при $t > 0$ прикладена сила $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ При $t < 0$ стержень перебував в положенні рівноваги.

Задачі електро- та магнітостатики.

Порівняти з результатом, отриманим за допомогою аналітичних розрахунків.

1. Знайти магнітне поле лінійного струму.
2. Знайти електричне поле, яке створює точковий заряд в анізотропному середовищі.
3. Анізотропна пластинка поміщена в однорідне електричне поле, направлене під кутом до поверхні пластинки. Знайти напруженість електричного поля всередині пластинки.
4. Знайти магнітне поле, яке створює кільце зі струмом.
5. Визначити потенціал і напруженість електричного поля рівномірно поляризованої кулі.
6. Знайти індукцію магнітного поля створене площиною, по якій тече однорідний електричний струм.
7. На межі поділу двох діелектриків заданий поверхневий рорподіл зарядів. Знайти електричне поле.
8. Знайти потенціал точкового заряду e, який знаходиться поблизу провідної заземленої (ізольованої) кулі. Радіус кулі R.
9. Всередині циліндричного провідника радіуса R, є циліндрична порожнина радіуса R_0 . Вісі циліндра, утворюючого порожнину, та циліндричного провідника паралельні і знаходяться на відстані a одна від одної. По провіднику тече струм, рівномірно розподілений по його перерізу з густиною j. Знайти напруженість магнітного поля такого провідника.

10. Система складається із рівномірно зарядженої кулі радіуса R та оточуючого середовища заповненого зарядом з об'ємною густиною $\rho = \alpha / r$, де − α додатня величина, r- відстань від центра кулі. Знайти напруженість електричного поля системи.

Задачі на власні функції та власні значення.

Знайти власні функції та власні значення оператора Лапласа для

1. Прямокутника з однорідною умовою Діріхле на сторонах.
2. Круга з однорідною умовою Діріхле на сторонах.
3. Сфери.
4. Плоскої фігури довільної форми з умовою Діріхле на краях.
5. Круглого циліндра з однорідними межовими умовами: на бічній поверхні − Діріхле, на основах − Неймана.
6. Кулі з однорідними межовими умовами Діріхле (Неймана).
7. Циліндричної оболонки висотою H з умовою Діріхле на краях.
8. Прямокутника з однорідною умовою Неймана на сторонах.
9. Круга з однорідною умовою Неймана на сторонах.
10. Кулі з однорідними межовими умовами Неймана.

Коливання мембрани та пластини.

1. Знайти поперечні коливання прямокутної мембрани $0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2$ із закріпленим краєм та за наявності сили тяжіння, викликані початковим відхиленням

$$u(x, y, 0) = Ae^{-(x+y)}(l_1 - x)(l_2 - y)$$

Реакцією зовнішнього середовища знехтувати. Додатково знайти аналітичний розв'язок і порівняти його з чисельним.

5. Знайти поперечні коливання прямокутної мембрани $0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2$ із закріпленим краєм, викликані початковим відхиленням

$$u(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y),$$

припускаючи що зовнішнє середовище чинить супротив пропорційний t.

6. Знайти поперечні коливання неоднорідної круглої мембрани $0 \le r \le r_2$ з закріпленим краєм, отриманої з'єднанням однорідної круглої мембрани $0 \le r \le r_1$ і однорідної кільцевої мембрани $r_1 \le r \le r_2$ якщо початкові поперечні відхилення задані.

7. Знайти коливання води у прямокутному резервуарі $0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2$ під дією змінного зовнішнього тиску на вільній поверхні

$$p(x, y, t) = p_0 cos\left(\frac{\pi x}{l_1}\right) cos\left(\frac{\pi y}{l_2}\right) f(t),\ 0 < t < +\infty,\ f(0) = 0$$

якщо глибина води в незбуреному стані рівна h. Функція $f(t) \in C^1$.

8. Знайти коливання круглої мембрани радіуса r_0 із закріпленим краєм в середовищі без опору, викликані змінним тиском

$$p = f(t, r), 0 \le r \le r_0, 0 \le t < \infty,$$

прикладеного до однієї сторони мембрани

9. Знайти поперечні коливання круглої мембрани з закріпленим краєм, припускаючи, що початкові відхилення мають форму параболоїда обертання, а початкові швидкості рівні 0.

10. Знайти поперечні коливання прямокутної пластинки $0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2$ з жорстко закріпленими краями в середовищі без опору, викликані ударом по центру пластини, що передав їй імпульс I.

Знаходження траєкторії руху частинки.

1. Рівняння руху, що враховує втрати енергії заряду на випромінювання має вигляд

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v},\vec{H}\right] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\vec{v}}.$$

Розв'яжіть його за умови, що $\vec{H} = \left[\vec{n},\vec{E}\right], \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-pt} cos\omega t, p = 0{,}1.$

2. Заряд рухається в магнітному полі Землі. Вектор-потенціал $\vec{A} = \frac{[\mu,r]}{r^3}$, де μ – магнітний момент Землі. Знайти траєкторію руху частинки.
3. Знайти траєкторію руху матеріальної точки в центральному полі
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$$
4. Знайти траєкторію руху матеріальної точки в центральному полі
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2} ln\frac{r}{r_0}$$
5. Знайти траєкторію руху матеріальної точки в центральному полі
$$U(r) = \frac{Ar}{2} ch\frac{1}{r}$$
6. Розглянути траєкторію руху релятивістської зарядженої частинки у взаємно перпендикулярних постійних однорідних електричному та магнітному полях.
7. Знайти траєкторію руху релятивістської частинки з зарядом e, маси m в полі нерухомого точкового заряду q.
8. Релятивістська заряджена частинка рухається в паралельних однорідних електричному та магнітному полях $\vec{\mathrm{E}}\|\vec{H}\|\mathrm{oz}$. При $t = 0$ частинка знаходилась в початку координат і мала імпульс $\vec{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Знайти траекторію руху частинки.
9. Знайти закон руху електрона в полі
$$U(x,y,z) = \frac{e}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) - \frac{e}{2}(k_1 + k_2)z^2$$

і магнітному полі $\vec{H} = H\vec{n}$.

10. Знайти траєкторію руху заряду, що влітає під малим кутом до квадрупольної лінзи. Напруженість магнітного поля, створюваного лінзою:
$$\vec{H} = \mp H\vec{\nabla}\varphi, \varphi = \frac{1}{a}xy$$

Задачі геометричної оптики.

1. Побудувати хід променів при проходження світла через тонку сферичну лінзу з метаматеріалу.
2. Змоделювати роботу діелектричного дзеркала.
3. Дослідити фокусування світла параболічним та сферичним дзеркалом.
4. Побудувати хід променів при проходження світла через плоско-паралельну пластинку з неоднорідним показником заломлення.
5. Змоделювати рух променів світла в атмосфері Землі. (Показник заломлення залежить від відстані до центру сфери).
6. Змоделювати явище міражу.
7. Змоделювати фокусування об'єктів людським оком.
8. Показати відбивання та заломлення світла кристалом льоду в вигляді шестикутного стовпчика.

Квантова механіка.

Знайти декілька перших власних функцій та власних значень рівняння Шредінгера для потенціалу:

1. $V(r) = \frac{a}{r+b}$
2. $V(x) = mgx, x > 0$
3. $V(r) = -\frac{V_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}$
4. $V(x) = \begin{cases} -V_0, -a < x < a \\ 0, x < -a \cup x > a \end{cases}$
5. $V(r) = V_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),\ x = \frac{r-r_0}{r_0}, V_0 > 0.$
6. $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - eEx$
7. $V(x, y, z) = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 + \frac{k_3}{2}z^2$
8. $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \gamma r^4$
9. $V(r) = Ar^2 + \frac{B}{r^2}$
10. $V(r) = -\frac{e^2}{r}$

При наявності особливості в точці 0 ввести малий параметр.