МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Державний університет «Київський авіаційний інститут»

С. Л. Субота, С. П. Бєлих, О. М. Зудов

Теорія ймовірностей та математична статистика: практикум для студентів

Київ – 2026

УДК 519.21 (075.8)

Автори :

Світлана Леонідівна Субота, канд. фіз.-мат. наук, асист.,
Світлана Петрівна Бєлих, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Олег Зудов, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти:

Н.В. Майко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
А.І. Момот, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Ухвалено науково-методичною комісією фізичного факультету
(протокол № 8 від 17 квітня 2026 року)
Рекомендовано до друку вченою радою фізичного факультету
(протокол № 11 від 21 квітня 2026 року)

Теорія ймовірності та математична статистика: практикум для студентів / С. Л. Субота, С. П. Бєлих, О. М. Зудов – К.: електронне видання, 2026. – 35 с.

Призначено для допомоги студентам у самостійній та аудиторній роботі під час вивчення нормативної дисципліни **«Теорія ймовірностей та математична статистика»**, яка є обов'язковою для студентів спеціальності Е5 "Фізика та астрономія" першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

Запропоновано як класичні задачі для даної дисципліни, так і авторські, спрямовані на краще розуміння теоретичного матеріалу. Застосовано систему подвійної індексації структурних одиниць. Перший індекс визначає належність завдання до одного з основних розділів дисципліни — **теорії ймовірностей** або **математичної статистики**, тоді як другий індекс відображає послідовність тем у структурі курсу та може розглядатися як орієнтовний номер практичного заняття. Для забезпечення однозначної ідентифікації завдань кожен номер супроводжується префіксом **«П»**.

Наведено умови задач, рекомендованих для опрацювання під час практичних занять та для самостійної роботи студентів. За рішенням викладача до розгляду можуть пропонуватися всі задачі або їх окрема частина залежно від структури навчального курсу та кількості аудиторних годин. **Жирним шрифтом** виділено задачі, рекомендовані для розв’язування під час аудиторної роботи.

Однією зірочкою (*) позначено задачі, що мають допоміжний або додатковий характер і можуть використовуватися для поглибленого опрацювання окремих тем курсу. Двома зірочками (**) позначено задачі підвищеного рівня складності.

УДК 519.21(075.8)

© С. Л. Субота, С. П. Бєлих, О.М. Зудов, 2026
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2026

Зміст

Передмова 4
Розділ 1 5
1.1 Основні поняття теорії ймовірностей. 5
1.2.1 Геометрична ймовірність 8
1.2.2 Умовна ймовірність, незалежність подій. 10
1.3. Повна ймовірність. Формула Байєса. 11
1.4. Послідовність незалежних випробувань. 13
Приклад КР - 1. 14
Розділ 2 15
2.6. Дискретні та неперервні випадкові величини. Функції випадкових величин. 15
2.7. Векторні випадкові величини.Функції векторних випадкових величин. 17
2.8. Числові характеристики випадкових величин 19
2.9. Характеристична функція. 21
2.10. Центральні граничні теореми 22
Приклад КР - 2 23
Розділ 3 24
3.12. Вибірки та їх характеристики. 24
3.13. Інтервальні оцінки. Перевірка гіпотез. 27
3.14. Елементи теорії кореляції. 28
Відповіді 31
Список літератури 34

Передмова

Дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» посідає важливе місце у системі математичної підготовки студентів природничих спеціальностей. Її вивчення формує сучасне уявлення про закономірності випадкових явищ і процесів, а також про математичні методи обробки та аналізу експериментальних даних, що широко застосовуються у природничих науках, техніці та прикладних дослідженнях. Крім цього, опанування теорії ймовірностей формує фундамент для розуміння внутрішньої логіки нейронних мереж, оскільки процес навчання моделей штучного інтелекту по суті є пошуком найбільш імовірних закономірностей у масивах даних.

Теорія ймовірностей досліджує математичні моделі випадкових подій і випадкових величин, дозволяючи кількісно описувати невизначеність та випадковість у різноманітних процесах. На її основі сформувалася математична статистика — галузь математики, що розробляє методи аналізу статистичних даних, оцінювання параметрів розподілів випадкових величин, побудови довірчих інтервалів та перевірки статистичних гіпотез.

У межах вивчення курсу студенти ознайомлюються з основними поняттями теорії ймовірностей, зокрема з випадковими подіями, класичними та геометричними ймовірностями, випадковими величинами та їх розподілами, числовими характеристиками, законами великих чисел і граничними теоремами. Подальше опанування дисципліни передбачає вивчення базових методів математичної статистики, серед яких — статистичні оцінки параметрів розподілів, довірчі інтервали, критерії перевірки статистичних гіпотез, а також основи аналізу вибіркових даних.

Запропонований збірник задач спрямований на формування у студентів практичних навичок застосування теоретичних положень курсу. Систематичне розв’язування задач дозволяє глибше засвоїти основні поняття й методи теорії ймовірностей та математичної статистики, а також підготуватися до використання відповідного математичного апарату в подальшому навчанні та науковій діяльності.

Автори сподіваються, що запропонований навчально-методичний посібник стане корисним інструментом для студентів у процесі опанування дисципліни та водночас ефективним методичним ресурсом для викладачів під час організації навчального процесу.

Розділ 1

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей.

П1.1 Події A, B і C означають, що взято хоча б по одній книзі з трьох різних збірників творів, кожний з яких містить мінімум три томи. Події A_s і B_k означають, відповідно, що із першого збірника творів взято s, а із другого – k томів. Що означають події: а) A + B + C; б) ABC; в) A_1+B_3; г) A_2B_2; д) $(A_1B_3 + B_1A_3)C$?

П1.2 Студент розв'язав 10 задач з математичного аналізу. Нехай подія A_i полягає в тому, що і-та задача розв'язана неправильно. Записати подію:
а) всі задачі розв'язані правильно;
б) хоча б одна задача розв'язана неправильно;
в) рівно одна задача розв'язана неправильно;
г) не більше 2 задач розв'язано неправильно;
д) хоча б 2 задачі розв'язані правильно;
е) рівно 2 задачі розв'язані правильно.

П1.3 Нехай A, B і C – випадкові події. Записати вирази для подій:
а) відбулась A або B;
б) відбулись A і B, а C не відбулась;
в) відбулись всі три події;
г) жодна подія не відбулась;
д) відбулась хоча б одна з цих подій;
е) відбулась лише одна з цих події;
є) відбулось хоча б дві події;
ж) відбулось рівно дві події;
з) відбулось не більше двох подій;
і) відбулось не більше однієї події.

П1.4 У екзаменаційному білеті, який витягнув студент є 3 питання. Нехай подія A_k= {студент знає відповідь на к-те питання}. Що означають вирази:
а) $A_1A_2A_3$; б) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; в) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$; г) $\overline{A_1}A_2A_3 \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup A_1A_2\overline{A_3}$.

П1.5 Подія A={йде дощ}, B={температура вище 20°C}, C= {дме сильний вітер}.
а) З'ясувати значення: $A\overline{B}C$; $B\backslash A$; $\overline{A}B\overline{C}$.
б) Перевірити логічність твердження: якщо $A \subset C$, то чи вірно, що дощ завжди супроводжується вітром?

П1.6 На контрольній з ММФ потрібно розв'язати 2 задачі з 3 на вибір студента. 20 студентів обрали першу і другу задачі, 10 – другу і третю, 18 – першу і третю. Побудувати діаграму Ейлера і відповісти на питання. Яка ймовірність, що навмання вибраний студент намагався розв'язувати першу задачу?

П1.7* Монету підкидають 3 рази підряд. Чи є σ-алгебрами системи підмножин:
а) $\emptyset, \Omega, \{ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР\}, \{РГГ, РГР, РРГ, РРР\}$;
б) $\emptyset, \Omega, \{ГГГ, ГРГ, РГР, РРР\}, \{РГГ, РГР, РРГ, РРР\}$?

П1.8 В інстаграмі у Міли 190 фотографій. На 58 з них зображено її улюбленого кота, а 128 з них – селфі. Яка ймовірність, що навмання відкрита фотографія з інстаграма Міли не містить ні Міли, ні її кота, якщо відомо, що Міла разом з котом сфотографована на 28 знімках?

П1.9 В групі, яка складається з 20 студентів, у 11 студентів карі очі, у 6 – сірі, у 2 – блакитні, у 1 – зелені. Яка ймовірність, що у 2 випадково обраних студентів очі одного кольору?

П1.10 Яка ймовірність того, що 4-значний пін-код:
а) має всі цифри різні;
б) має тільки дві однакові цифри;
в) має дві пари однакових цифр;
г) має тільки три однакових цифри;
д) має всі цифри однакові.

П1.11 Компанія з n (всі люди різних спеціальностей) осіб сідає за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що фізик і математик сидітимуть поруч. Яка ймовірність, що фізик при цьому буде сидіти зліва від математика?

П1.12 З повної колоди карт (52 карти) виймається навмання зразу три карти. Знайти ймовірність того, що це будуть дві двійки та один валет.

П1.13 З колоди карт (36 карт) виймається навмання зразу три карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна дама.

П1.14 З колоди карт (36 карт) виймається навмання зразу три карти. Знайти ймовірність того, що всі карти будуть чорними.

П1.15 Слово «ПІДРУЧНИК» складене з літер розрізної абетки. Потім картки з літерами перемішують і з них витягають по черзі 4 картки. Яка ймовірність того, що ці чотири картки в порядку появи складуть слово «ДРУК»?

П1.16 З 10 літер розрізної абетки складене слово «МАТЕМАТИКА». Потім картки з літерами перемішують і беруть навмання 4 картки. Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово «ТЕМА»?

П1.17 З 6 літер розрізної абетки складене слово «КАРЕТА». Потім картки з літерами перемішують і знову збирають в довільному порядку. Яка ймовірність того, що вийде слово «РАКЕТА»?

П1.18 На картках написані числа від 1 до шести. Скільки шестизначних чисел можна скласти?

П1.19 Домашнє завдання зробили двадцять з тридцяти студентів. Викладач перевіряє його у шести навмання вибраних студентів. Яка ймовірність, що він поставить дві двійки? Шість двійок?

П1.20 Двоє піратів ділять між собою 5 золотих монет і 12 срібних. Скількома способами можна зробити поділ (враховуючи і зовсім несправедливі варіанти)?

П1.21 В одній арабській країні для збільшення кількості жіночого населення видали закон, який забороняє жінкам народжувати дітей після того, як у них народився хлопчик. Тобто жінки могли мати або одного хлопчика; або дівчинку, а потім хлопчика; або двох дівчат і хлопчика; ... або будь-яку кількість дівчат і одного хлопчика (наймолодшого).
а) Знайти ймовірність того, жінка має п'ятеро дітей.
б) Знайти найбільш ймовірну кількість дітей і середню кількість дітей у сім'ї.
в) Оцінити співвідношення жінок і чоловіків після багатьох років виконання цього закону.

П1.22 Наступного тижня Марія планує три рази сходити в фітнес-клуб, два рази в салон краси і п'ять разів в супермаркет. Скількома способами вона може це зробити (за умови, що вона не ходить більше одного разу в день в одне і те ж місце)?

П1.23 Колода карт ділиться навпіл. Знайти ймовірність того, що кількість червоних і чорних карт в обох пачках буде однаковою. Порівняти відповіді для колоди з 36 і 52 карт.

П1.24 Яка ймовірність того, що мавпа, яка випадковим чином б'є пальцями по клавіатурі з 100 клавіш, напише слово МАТЕМАТИКА з першої спроби? Нехай мавпа нажимає по 10 клавіш в секунду. Яка ймовірність появи даного слова, якщо дати їй можливість друкувати неперервно протягом мільярда років по 10 букв за секунду? Скільки років їй потрібно друкувати, щоб з імовірністю 50% це слово з'явилось хоча б 1 раз?

П1.25 В ящику лежить 5 різних пар шкарпеток. Навмання беруть 2 шкарпетки. Яка ймовірність, що вони будуть різні? Як зміниться ймовірність, якщо 2 з 5 пар шкарпеток у ящику однакові?

П1.26 Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на 27 кубиків однакового розміру. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кубик матиме: а) одну пофарбовану грань; б) рівно 2 пофарбовані грані? Як зміниться ймовірність, якщо великий куб розпиляли на 1000 кубиків?

П1.27 Хлопчик кидає 2 монети, поки на обох не випадуть герби. Побудувати простір елементарних подій. Яка ймовірність, що хлопчику доведеться зробити не менше 6 підкидань?

П1.28** В ящику лежать чорні й білі шкарпетки не з'єднані між собою. Якщо навмання витягнути 2 шкарпетки, ймовірність того, що вони білі рівна 1/2. Яка мінімально можлива кількість шкарпеток у ящику? Яка мінімально можлива кількість шкарпеток у

ящику, якщо відомо що кількість чорних шкарпеток парна? Чи можливо досягти умов задачі, якщо кількість білих шкарпеток парна?

П1.29 Компанія з 8 людей грає в гру. На картках пишуть завдання, складають в урну і кожен навмання витягає картку. Знайти ймовірність того, що
а) хоча б одне завдання попадеться тому, хто його написав;
б) конкретна людина отримає своє завдання.
Порівняти поведінку цих ймовірностей при збільшенні числа учасників ($n \to \infty$).

П1.30 Студент не знає відповіді на питання тесту. Потрібно вибрати 2 правильні відповіді з 5. Яка ймовірність вгадати ці відповіді? Яка ймовірність, що він вгадає одну відповідь з двох?

П1.31 Підкидають 2 шестигранних кубика. Подія $A = \{$сума очок парна$\}$, $B = \{$випала хоча б одна «6»$\}$. Описати події AB, $A + B$, $A\overline{B}$ та знайти їхні ймовірності.

П1.32 На потоці 48 студентів, з них 16 погано відвідують заняття. Потік випадковим чином ділять на групи по 3 студенти. Яка ймовірність, що в кожній групі опиниться по одному студенту, що погано відвідує заняття?

П1.33 В 4-значному пін-коді перемножують між собою цифри. Яка ймовірність, що добуток буде парним числом?

П1.34 Скільки прямокутників є на дошці для шахів?

П1.35 На картках написані цифри 1, 2, 3, 4, 5. Спочатку вибирають одну картку, а потім ще одну з тих, що залишились. Яка ймовірність, що картка з парною цифрою буде обрана а) першою, б) другою, в) обидва рази.

П1.36 Шестигранний кубик кидають доти, поки не випаде 6 очок. Яка ймовірність, що знадобиться 4 підкидання? Не більше 2 підкидань?

П1.37 У деякому замкненому об’ємі знаходяться 30 молекул, що хаотично рухаються. Скількома способами можуть розташуватися молекули таким чином, щоб:
а) у лівій половині об’єму було рівно три молекули?
б) у лівій половині було рівно 27 молекул?
У якому з випадків а) чи б) ентропія системи більша?
в) скількома способами взагалі можна розподілити ці молекули між двома половинами?
г) який розподіл молекул з усіх можливих має найбільшу ентропію? Чому?

1.2.1 Геометрична ймовірність

П2.1 На вулиці, довжиною 2 км, загубилися ключі. Виявилося, що на цій вулиці є ліхтар, який освітлює лише певну частину, довжиною 10 м. Знайдіть ймовірність того, що ключі випали саме на освітлену ділянку вулиці. Вважається, що ймовірність того, що ключі

випали на освітлену ділянку, пропорційна довжині цієї ділянки, і не залежить від того, де саме вона розташована на вулиці.

П2.2 В квадрат вписаний круг, в який вписаний маленький квадрат зі стороною a. У великому квадраті навмання вибирається точка. Яка ймовірність того, що вона потрапить в середину круга, але зовні маленького квадрата?

П2.3 Усередині циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи, розташована куля, що дотикається до обох основ та бічної поверхні. Яка ймовірність того, що точка, навмання кинута в циліндр, потрапить у кулю?

П2.4 (Задача про зустріч). Хлопець і дівчина домовилися про зустріч між 9 і 10 годинами ранку, причому домовилися чекати один одного не більше 10 хвилин. Враховуючи, що момент приходу на зустріч вибирається кожним "навмання" в межах вказаного часу, знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

П2.5 Знайти як зміниться ймовірність зустрічі (задача П2.4), якщо дівчина чекає 10 хвилин, а хлопець – 15.

П2.6 Аналогічно умові задачі П2.4 троє людей домовилось про зустріч. Кожен з них чекає к хвилин. Яка ймовірність того, що: а) зустріч трьох осіб відбудеться; б) зустріч хоча б двох осіб відбудеться? Порахувати ймовірність для k=10 хвилин, k=30 хвилин.

П2.7 (Задача про трикутник). Стрижень одиничної довжини навмання розламують у двох місцях. Яка ймовірність того, що з трьох утворених уламків можна зібрати трикутник?

П2.8 На відрізку [0,1] навмання вибирають три точки. Яка ймовірність, що з трьох відрізків, що рівні довжинам від початку координат до вибраних точок, можна скласти трикутник?

П2.9 На площину нанесені паралельні прямі на однаковій відстані a одна від одної. На площину кидають монету радіуса R $(R < a/2)$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне ні жодної прямої.

П2.10 Дві точки вибираються "навмання" з відрізка [0,1]. Нехай p і q – координати цих точок. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння
$x^2 + 2px + q = 0$ буде мати дійсні корені.

П2.11 Якої товщини повинна бути монета, щоб ймовірність падіння на ребро була рівна 1/3? Момент інерції не враховувати. Вважати, що кут нахилу монети в момент падіння приймає рівноймовірні значення.

П2.12 На колі радіуса R вибирається дві точки і з'єднуються хордою. Знайти ймовірність того, що довжина хорди перевищуватиме R.

П2.13** (Парадокс Бертрана) В колі одиничного радіуса довільним чином проводять хорду. Яка ймовірність, що її довжина буде менше ніж $\sqrt{3}$?

1.2.2 Умовна ймовірність, незалежність подій.

П2.21 Чи справедливі рівності:
а) $P\{B|A\} + P\{\overline{B}|A\} = 1$; б) $P\{B|A\} + P\{B|\overline{A}\} = 1$?

П2.22 Двічі підкидають монету. Подія A ={двічі випав герб}, B ={при другому підкиданні випав герб}. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$.

П2.23 Кинуто три гральних кубика. Знайти ймовірність того, що на всіх кубиках випала шістка, якщо відомо, що: а) на одному кубику випало 6 очок; б) на першому кубику випало 6 очок; в) хоча б на одному кубику випало 6 очок; г) на двох кубиках випали шістки; д) хоча б на двох кубиках випала однакова кількість очок; е) на всіх кубиках випала однакова кількість очок.

П2.24 Знайти ймовірність того, що при киданні трьох гральних кубиків хоча б на одному випаде 6 очок, при умові, що на цих кубиках випали грані з парною кількістю очок.

П2.25 Відомо, що при киданні 5 гральних кубиків з'явилась хоча б одна «1». Яка ймовірність того, що з'явилось дві «1» чи більше?

П2.26 Два гравці почергово витягують кулі (без повернення) з урни, яка містить M білих та N-M чорних куль. Виграє той, хто першим витягне білу кулю. Знайти ймовірність виграшу першого учасника, якщо:
а) N=4, M =1;
б) N=5, M =1;
в) N=7, M =2.

П2.27 Ймовірність влучення в першу мішень для даного стрілка дорівнює 2/3. Якщо при першому пострілі зафіксовано влучення, то стрілок отримує право на другий постріл по іншій мішені. Ймовірність влучення в обидві мішені при двох пострілах дорівнює 1/2. Визначити ймовірність попадання в другу мішень.

П2.28 Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирає її навмання. Визначити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше ніж в два місця. Як зміниться ймовірність, якщо відомо, що остання цифра парна?

П2.29 Впорядкуйте, використовуючи знаки порівняння, величини 0, $P(A \cup B), P(A) + P(B), P(A|B), P(A \cap B), P(\mathrm{A})$ за припущення, що: а) події A і B несумісні, б) події A і B незалежні.

П2.30 В урні містяться 2 білі і 3 чорні кулі. З урни послідовно виймають 2 кулі. Знайдіть імовірність того, що обидві кулі білі, якщо вибір проводиться: а) без повернення; б) з поверненням.

П2.31 Імовірність того, що у результаті чотирьох незалежних випробувань з однаковою ймовірністю успіху p буде хоча б один успіх, дорівнює 1/2. Визначте p.

П2.32 Кинуто дві монети. Нехай подія А полягає в тому, що на першій монеті випав герб, В – на другій, С – лише на одній монеті випав герб. Перевірити, чи є залежними події А, В і С: а) в сукупності, б) попарно.

1.3. Повна ймовірність. Формула Байєса.

П3.1 На тренування з футболу ходить 5 учнів першого, 8 другого і 7 третього класу. Ймовірність забути вдома спортивну форму 0.3, 0.2 і 0.1 відповідно для учнів першого, другого та третього класу. Яка ймовірність, що учень забув спортивну форму?

П3.2 Завод виготовляє прилади А, В і С. В 2016 році вони виготовили відповідно 220 приладів типу А, 150 – В і 130 – С . З них виявилось бракованих 12 приладів типу А, 7 – В і 8 – С. Яка ймовірність, що навмання взятий прилад бракований? Відповідь виразити в %.

П3.3 30% чоловіків і 60% жінок мають довге волосся. Навмання взята людина має довге волосся, яка ймовірність, що це чоловік?

П3.4 За оцінками ветеринарної служби 10% домашніх і 80% вуличних котів міста мають блохи. Вуличних котів 2% серед котів цього міста. Випадково оглянутий кіт виявився з блохами. Яка ймовірність, що він домашній?

П3.5 Лічильник реєструє частинки трьох типів: А, В, С. Ймовірність появи цих частинок відповідно 0.1, 0.5, 0.4. Частинки кожного з цих типів лічильник реєструє з ймовірністю відповідно 0.9, 0.4, 0.6. Лічильник зареєстрував частинку. Якого типу найімовірніше вона була?

П3.6 Спрощена система контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. У результаті k-ї перевірки (k=1,2) виріб, який задовольняє стандарт, відбраковується з ймовірністю β_k, а бракований виріб приймається з ймовірністю α_k. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. Знайти ймовірність подій:
1) бракований виріб буде прийнятий;
2) виріб, що задовольняє стандарт, буде забракований.

П3.7 В першій коробці знаходиться 10 батарейок, а в другій – 6. В кожній з коробок 1 з батарейок використані, інші – нові. З кожної коробки вилучили по одній батарейці, а залишені зсипали в 3-ю коробку. Знайти ймовірність того, що батарейка, витягнута з 3-ї урни, виявиться використаною.

П3.8 З ящика, який містить 2 білих та 3 шоколадних морозива, навмання вилучили 2 морозива та додали 1 біле:
а) знайти ймовірність того, що після цього навмання вибране з ящика морозиво виявиться білим;
б) нехай з ящика по схемі випадкового вибору з поверненням вилучили k штук. Знайти ймовірність того, що всі вони білі.

П3.9 Є дві партії однотипних виробів з 12 і 10 штук, причому в кожній партії є по одному бракованому. Виріб, який взяли навмання з першої партії, переклали в другу, після чого вибрали навмання один виріб з другої партії. Визначити ймовірність того, що другий раз буде витягнутий бракований виріб.

П3.10 Студент вивчив на залік 40 питань з 60. Якщо студент не знає відповіді на поставлене питання, викладач задає йому ще одне. Залік ставиться, якщо студент відповідає правильно хоча б на одне питання. Яка ймовірність отримання заліку?

П3.11 При переливанні крові потрібно враховувати групи крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або цієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33.7 % мають першу групу крові, 37.5 % – другу, 20.9 % – третю і 7.9 % – четверту. Відомо, що для випадково взятих донора і хворого можна зробити переливання крові. Знайдіть імовірність того, що: а) хворий має першу групу крові; б) донор має другу групу крові.

П3.12 В групі, яка складається з 10 хлопців і 20 дівчат, 5 дівчат і 8 хлопців мають блакитні очі. Всі інші мають карі очі. В двірне вічко на нас дивиться каре око. Яка ймовірність, що це дівчина?

П3.13 По каналу зв’язку може бути передана одна з трьох послідовностей букв: AAAA, BBBB, CCCC; відомо, що ймовірність кожної з послідовностей рівні відповідно 0.3; 0.4; 0.3. В результаті шумів буква приймається з ймовірністю 0.6. Ймовірності прийому переданої букви за дві інші складає 0.2, 0.2. Припускається, що букви пошкоджуються незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що передано AAAA, якщо прийомний пристрій отримав ABCA.

П3.14 З повного набору доміно навмання беруться дві кістки. Визначити ймовірність того, що другу кістку можна приставити до першої.

П3.15 З урни, де лежать n куль невідомого кольору, витягнули кулю, яка виявилась білою, і поклали її назад. Потім знову витягли кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білого кольору. Усі припущення про початковий колір кульок в урні вважати рівноможливими.

1.4. Послідовність незалежних випробувань.

П4.1 Монету кидають до тих пір, поки вона 2 рази підряд не випаде однією стороною. Знайти ймовірність того, що а) дослід закінчиться до четвертого підкидання, б) знадобиться парна кількість підкидань.

П4.2 Відбувається 3 незалежні випробування, ймовірність появи події А в яких однакова. Знайти Р(А), якщо відомо, що ймовірність появи події А хоча б в одному з них 19/27.

П4.3 Кожен елемент з електронної схеми виходить з ладу незалежно від інших. Ймовірність виходу з ладу і-го елементу p_i. Знайти ймовірність виходу з ладу всієї системи, якщо елементи з'єднані а) паралельно, б) послідовно.

П4.4 Скільки разів потрібно кинути гральний кубик, щоб ймовірність отримати 6 очок була а) більше 0.5, б) більше 0.9, в) більше 0.97.

П4.5 Кинуто 10 правильних гральних кубиків. Яка ймовірність випадання: 1) хоча б одної 1; 2) лише одної 1; 3) рівно трьох одиниць. Знайти точні значення і порівняти зі значеннями, обрахованими за формулою Пуассона та теоремою Муавра-Лапласа.

П4.6 Серед китайців 3% шульг, а серед голландців 13%. Який має бути об'єм випадкової вибірки з поверненням для кожної країни, щоб ймовірність зустріти в ній хоч 1 шульгу дорівнювала 0.95?

П4.7 Ймовірність допустити похибку, що перевищує задану точність, при вимірюванні деякої фізичної величини дорівнює 0.2. Виконано 5 незалежних вимірювань. Знайти ймовірність того, що лише в одному з них похибка буде перевищувати задану точність.

П4.8 Дві монети підкидають 3800 раз. Знайти наближене значення того, що подія «герб-герб» з'явиться не менше 970 разів.

П4.9 Ймовірність народження кожного студента в один день дорівнює 1/365. Знайти найбільш імовірне число студентів вашої групи (15 студентів?), які народилися 10 лютого, та ймовірність того, що знайдуться 2 студенти з одним і тим же днем народження. Порахувати такі ж імовірності для всього факультету (300?).

П4.10** В умовах попередньої задачі знайти ймовірність того, що знайдуться 3 студенти з одним і тим же днем народження. Висловити свої ідеї, чи потрібно враховувати, що можуть співпадати 2 дні народження у інших студентів. Як змінюється значення ймовірності?

П4.11** В одному класі з 26 учнів виявилось 2 пари і ще 1 трійка учнів з однаковими днями народження. Яка ймовірність цієї події? Оцінити ймовірність знаходження такої комбінації у всіх школах Києва.

П4.12 Відомо, що ймовірність народження хлопчика 0.515. Яка ймовірність того, що серед 10000 новонароджених кількість хлопчиків буде не більше, ніж дівчаток?

П4.13 В магазин привезли 25 ящиків пива (по 20 пляшок). Ймовірність того, що пляшка розіб'ється при перевезенні дорівнює 0.002. По дорозі 3 пляшки розбилось. Яка найімовірніша кількість пляшок розбивається по дорозі? Яка ймовірність того, що водій каже неправду і розбилось менше ніж 3 пляшки?

П4.14 В урні є три кулі: чорна, червона і біла. З урни кулі по одній виймалися 5 разів, причому після кожного витягнення куля поверталася назад в урну. Визначити імовірність того, що чорна і біла кулі будуть витягнуті не менше ніж по два рази кожна.

П4.15* Отримати формулу для визначення моди біноміального розподілу:
$np - q \leq k_0 \leq np + p$.

П4.16 Монету підкидають n разів. Знайти ймовірність того, що кількість випадіння герба непарна.

П4.17 Завод виробляє вироби, з яких 1% є бракованими. Для контролю відібрано 150 виробів. Знайти найбільш імовірне число бракованих виробів у цій партії.

П4.18 З колоди у 36 карт навмання виймають одну карту, записують її масть і повертають назад. Досвід повторюють 10 разів. Знайти найімовірнішу кількість випадінь карти «пікової» масті.

П4.19 Кількість покупців у магазині за день описується розподілом Пуассона з параметром λ. Кожен покупець здійснює покупку з імовірністю p. Знайти ймовірність того, що за день буде здійснено k покупок. Якщо за день було здійснено 20 покупок, яка ймовірність того, що магазин відвідало 30 людей?

П4.20 Двоє друзів грають у гру: гравець підкидає монету і отримує бал за кожен герб. Знайдіть ймовірність того, що гра закінчиться нічиєю (кількість підкидань однакова).

Приклад контрольної роботи № 1.

1. Спростити $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})$.

2. Є 6 деталей першого ґатунку, 5 – другого ґатунку, 4 – третього ґатунку. Яка ймовірність того, що серед 3 випадково відібраних деталей опиняться деталі усіх ґатунків?

3. В урні знаходиться 8 карток з цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Із урни навмання без повернення виймають по одній усі картки і цифри, що з'являються, записують зліва направо. Яка ймовірність того, що усі непарні цифри стоятимуть поруч?

4. Монетку кинули 6 раз, яка ймовірність, що герб випаде непарну кількість раз.

5. Кинуто 3 гральних кубики. Знайти ймовірність того, що на всіх кубиках випала шістка, якщо відомо, що хоча б на одному випала парна кількість очок.

6. 95% дітей в 1990р. мали щеплення від поліомієліту. Ймовірність захворіти при відсутності щеплення – 0.01, при наявності – в 100 раз менше. Дитина захворіла на поліомієліт. Яка ймовірність, що їй робили щеплення?

7. Слово «СИНХРОФАЗОТРОН» складене з літер розрізної абетки. Потім картки з літерами перемішують і з них витягають по черзі 4 картки. Яка ймовірність того, що ці чотири картки в порядку появи складуть слово «ТРОС»?

8. Яка ймовірність потрапити, не цілячись, нескінченно малою кулею у квадратну решітку, якщо товщина прутів дорівнює a, а відстань між їх середніми лініями дорівнює l?

9. Вважаємо, що ймовірність того, що навмання взяте ціле число кратне n, дорівнює $1/n$. Знайти ймовірність того, що навмання взяте ціле число просте.

Розділ 2

2.6. Дискретні та неперервні випадкові величини. Функції випадкових величин.

П6.1 У комп'ютерній грі герой відкриває 5 магічних скринь. Відомо, що в кожній скрині з імовірністю 50% може бути артефакт, а в іншому випадку — вона порожня. Побудувати багатокутник розподілу кількості знайдених артефактів.

П**6.2** Випадкова величина ξ має такий розподіл імовірностей:

ξ	-3	-1	0	2	4
p	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Знайти вираз і побудувати графік функції розподілу ξ. Знайти ймовірність того, що величина ξ набуває значення, яке не перевищує 2.

П6.3 Страхова компанія застрахувала 10000 автомобілів. Імовірність настання страхового випадку для кожного авто протягом року — 0.0003. Знайдіть закон розподілу кількості страхових випадків та визначте найімовірнішу кількість страхових виплат за рік.

П6.4 У миттєвій лотереї кожен білет може бути виграшним з імовірністю 0.02. Людина купує білети по одному до тих пір, поки не придбає перший виграшний білет. Побудуйте функцію розподілу кількості куплених білетів. Знайдіть імовірність того, що людині

доведеться купити більше 10 білетів. Яку найбільш імовірну кількість білетів вона придбає?

П6.5 Дискретна випадкова величина має закон розподілу

x_i	-2	0	1	5
$P\{\xi = x_i\}$	$1/4$	$1/3$	$1/6$	$1/4$

Побудувати закон розподілу величин:
а) $1 - 2\xi$; б) $\xi^2 + \xi - 2$; в) 2^{ξ}; г) $max(\xi, 1)$.

П6.6 У настільній грі гравці кидають два шестигранних кубики і віднімають числа, зображені на гранях. У грі розглядається лише невід'ємна різниця. Наприклад, якщо гравець викидає 4 і 6, беруть різницю 2. Побудувати закон розподілу різниці значень.

П6.7 Дискретна випадкова величина ξ має функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 3/10, & 2 < x \le 3, \\ 1/2, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти її закон розподілу, а також закон розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2 - 1$.

П6.8 Знайти функцію розподілу індикатора випадкової події А.

П6.9 Задана густина розподілу неперервної випадкової величини ξ:
$p_{\xi}(x) = A\sin(x), 0 \le x \le \pi$. Знайти постійний параметр A.

П6.10 Чи може $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ бути функцією розподілу випадкових величин, змінюючись в межах: а) $(-\infty, \infty)$; б) $[0, \infty)$; в) $(-\infty, 0)$?

П6.11 Чи можна підібрати константу c для функції cx^{-4} як густини розподілу на множинах: [1, ∞), [0, ∞), [2, 1], [-3, 0)?

П6.12 Які з наступних функцій є функціями розподілу:
а) $I\{x \in (0,1]\}$; б) $I\{x \in (-\infty, 0]\}$; в) $I\{x \in (0, \infty)\}$; г) $I\{x = 0\}$;
д) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 1 - 1/n, & x \in (n-1, n], n \in N \end{cases}$;
е) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ 1 + (-1)^n/n, & x \in (n-1, n], n \in N \end{cases}$?

П6.13 При яких a та b функція $F(x) = a + b\,arctg(x)$ буде функцією розподілу випадкової величини? Знайти густину розподілу цієї величини.

П6.14 Знайти густину ймовірності об'єму куба η, ребро якого ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі (0,a).

П6.15 На коло радіуса R з центром в початку координат навмання кинуто точку.Знайти густину розподілу її координати x.

П6.16 Густина ймовірності частоти випромінювання абсолютно чорного тіла $f(v) = \frac{Bv^3}{e^{hv/kT}-1}$, де B визначається з умови нормування. Знайти густину розподілу випромінювання по довжинам хвиль.

П6.17 Функція розподілу випадкової величини ξ $-F_\xi(x)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = a\xi + b$, де a і b – довільні константи.

П6.18 Нехай випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти густину розподілу випадкової величини $\eta = e^\xi$ (логнормальний розподіл)

П6.19 Нехай випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами μ і σ^2. Довести, що випадкова величина $\eta = \frac{\xi-\mu}{\sigma}$ має стандартний нормальний розподіл.

П6.20 Нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром α. Знайти густину розподілу випадкової величини $\eta = min(\xi, \xi^2)$.

П6.21 Що станеться з графіком функції розподілу випадкової величини ξ, якщо:
а) до ξ додати число 2;
б) помножити ξ на число 2?

П6.22 Що станеться з графіком густини абсолютно неперервного розподілу випадкової величини ξ, якщо:
а) до ξ додати число 2;
б) помножити ξ на число 2?

П6.23 Частота зовнішньої сили ω коливається біля резонансної частоти системи ω_0. Нехай різниця $D = \omega - \omega_0$ рівномірно розподілена в інтервалі $[-1,1]$. Амплітуда коливань A в спрощеній моделі резонансу описується функцією $A = \frac{1}{1+D^2}$. Знайти густину ймовірності амплітуди коливань.

2.7. Векторні випадкові величини. Функції векторних випадкових величин.

П7.1 Спільний розподіл $p_{ij}=P\{\xi_1= i, \xi_2 = j\}$ випадкових величин ξ_1, ξ_2 заданий в таблиці

i \ j	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Знайти: а) одномірний розподіл $p_i = P\{\xi_1= i\}$, $p_j = P\{\xi_1= i\}$, $p_j = P\{\xi_2=j\}$; б) спільний розподіл $q_{ij} = P\{\eta_1=i ,\eta_2=j\}$ випадкових величин $\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1\xi_2$; в) одномірні розподіли $q_i = P\{\eta_1=i\}$, $q_j = P\{\eta_2=j\}$; г) спільний розподіл величин $\max(\xi_1,\xi_2)$, $\min(\xi_1,\xi_2)$.

П7.2 Випадкові величини ξ і η незалежні і мають стандартний нормальний розподіл. Знайти ймовірність попадання точки (ξ, η) в

а) кільце $\{(x,y): 2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3\}$;

б) квадрат $\{(x,y): |x|+|y| \le \sqrt{2}\}$.

П7.3 Спільний розподіл випадкових величин ξ та η має густину:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(5x^2-6xy+2y^2)/2}$$

Знайти густини розподілів: а) компонент ξ та η; б) умовні $\xi|\eta$ і $\eta|\xi$; в) $\xi+\eta$; г) вектора $(\xi+\eta, \xi-\eta)$.

П7.4 Густина спільного розподілу величин ξ_1 ,ξ_2 визначається виразом:

$$P_{\xi_1\xi_2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}, u^2+v^2 > 1 \\ 0, \quad u^2+v^2 \le 1 \end{cases}$$

Знайти густину розподілу $\eta = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$.

П7.5 Випадкова точка рівномірно розподілена в області $D = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$. Чи будуть незалежними полярні координати цієї точки? Декартові?

П7.6 Тролейбуси рухаються з інтервалом 8 хв, поїзда метро — з інтервалом 2 хв. Визначити закон сумарного часу очікування транспорту випадково обраним пасажиром, який користується тролейбусом і метро (без пересадок в метро), щоб доїхати на роботу.

П7.7 Випадкові величини ξ та η незалежні й мають показникові розподіл з густиною $e^{-x}(x \ge 0)$ кожна. Знайти густину розподілу: а) $\xi+\eta$, б) $\xi-\eta$, в) $|\xi-\eta|$, г) ξ/η.

П7.8 Визначимо густину ймовірності добутку двох незалежних величин, кожна із яких рівномірно розподілена на інтервалі відповідно (*0,b*) і (*0,d*).

П7.9 Випадкові величини ξ та η розподілені за законом Коші: $p(x)=1/\pi(1+x^2)$. Знайти закон розподілу їх суми.

П7.10 Довести, що якщо ξ і η незалежні і їх густини розподілів співпадають і дорівнюють $p_\eta(x)=p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0$, то величини $\zeta_1 = \xi+\eta$ і $\zeta_2 = \xi/\eta$ також є незалежними.

П7.11 Нехай незалежні випадкові величини ξ та η мають стандартний нормальний розподіл. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi^2+\eta^2$.

П7.12* Випадкова величина ξ розподілена за геометричним законом. Довести, що $P\{\xi = n+m | \xi \ge n\} = P\{\xi = n\}$ (відсутність післядії).

П7.13* Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом. Довести, що $P\{x_1 < \xi < x_2 \mid \xi > x_1\} = P\{\xi < x_2 - x_1\}$ (відсутність післядії).

П7.14 Дискретні випадкові величини ξ і η задані розподілами:

ξ	-1	1
p	0.3	0.7

η	0	1
p	0.1	0.9

Знайти розподіл випадкової величини $\chi = \xi + \eta$.

П7.15 Випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні, причому ξ_1 розподілена за законом $\mathrm{N}(0,1)$, а величина $\xi_2 = \sqrt{\chi_n^2/n}$. Знайти розподіл густини ймовірності випадкової величини $\eta = \xi_1/\xi_2$.

2.8. Числові характеристики випадкових величин

П8.1 Аліса їздить на роботу на електричці. Одного разу Аліса переплутала і купила квиток не на ту станцію. Вона вирішила їхати далі. Якщо контролер перевірить квитки, їй доведеться заплатити штраф 300 грн. Аліса вважає, що ймовірність появи контролера 5%. Квиток, який купила Аліса, коштує 5 грн. Знайдіть загальну очікувану вартість поїздки Аліси.

П8.2 Хлопчик стріляє по баночкам з рогатки. Імовірність влучення постійна і рівна 1/5. Визначити математичне сподівання і дисперсію кількості влучень, якщо хлопчик робить 6 пострілів.

П8.3 Хлопчик стріляє по баночкам з рогатки до першого влучення**.** Імовірність влучення постійна і рівна 1/5. Визначити математичне сподівання і дисперсію кількості пострілів. Чи зміняться ці величини, якщо хлопчик може зробити не більше 6 пострілів?

П8.4** Бабуся кожен день продає на вокзалі пиріжки по 70 гривень кожен. Бабуся оцінює собівартість одного пиріжка в 40 гривень. Наступного дня вона пече свіжі пиріжки, а непродані викидає. Вважаємо, що кількість проданих за день пиріжків має розподіл Пуассона з середнім значенням 50. Скільки пиріжків бабуся має випікати щодня, щоб максимізувати свій прибуток?

П8.5 Електрон, що знаходиться в силовому полі, має енергію E, що приймає значення $e_i = a(i + 1/2), i = 0,1,2,3,\ldots$ з іймовірностями, що пропорційні e^{-be_i}, a і b – сталі. Знайти M(E) і D(E).

П8.6 Нехай k пронумерованих частинок випадковим чином розміщуються в n комірках. Знайти середнє значення порожніх комірок.

П8.7 Знайти густину ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини ξ, якщо відомо $M\xi = 3, D\xi = 4$.

П8.8 Знайти густину ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини ξ, якщо відомо $P\{\xi < 0.44\} = 0.1$, а $P\{\xi \geq 3.88\} = 0.33$.

П8.9 Випадкові величини ξ та η незалежні, $M\xi = 2, M\eta = 1, D\xi = 1$ і $D\eta = 3$. Знайти $M(\xi - 3\eta)$ і $D(\xi - 3\eta)$.

П8.10 У випадкового вектора (ξ, η) $M\xi = 0, M\eta = 2, D\xi = 2$ і $D\eta = 1$, коефіцієнт кореляції $r(\xi, \eta) = -1/\sqrt{2}$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\zeta = 2\xi - 3\eta$.

П8.11 Діаметр кола d виміряний наближено, причому $a - \delta \leq d \leq a + \delta$. Розглянувши діаметр як випадкову величину, розподілену рівномірно в інтервалі $(a - \delta, a + \delta)$, знайти математичне сподівання та дисперсію площі кола.

П8.12 Знайти коефіцієнт кореляції між числом "одиниць" і числом "шісток" при 3 підкиданнях шестигранного кубика.

П8.13* Випадкові величини ξ та η набувають по 2 значення кожна і є некорельованими. Довести, що вони є незалежними.

П8.14 В ящику a білих і b чорних куль. Одночасно виймають k куль $(k \leq a + b)$. Знайти математичне сподівання і дисперсію витягнутих білих куль.

П8.15 Як правило, тато сварить Петю за принесену «двійку» близько 6 хв. Знайти математичне сподівання й дисперсію тривалості нотації. На цей раз нотація продовжується більше 6 хв. Визначити, з якою ймовірністю тато закінчить «читати нотацію» протягом найближчої хвилини?

П8.16 Знайти математичне сподівання і дисперсію площі прямокутника. Довжини сторін – випадкові величини, рівномірно розподілені в інтервалі $[0, a]$ і $[0, b]$ відповідно.

П8.17 Наближений розподіл частоти випромінювання абсолютно чорного тіла описується густиною $p(\nu) = A\nu^3 exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right), \nu \geq 0$. Знайти константу А, моду, медіану та математичне сподівання частоти випромінювання.

П8.18 Задано закон розподілу векторної випадкової величини:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
0	0.1	0.15	0.1
1	0.2	0.25	0.2

Знайти математичне сподівання та дисперсію величин ξта η, обчислити їх коефіцієнт кореляції. Чи є ці величини незалежними? Знайти математичне сподівання та дисперсію для величини $\chi = 4\xi + \eta^3$.

2.9. Характеристична функція.

П9.1 Випадкова величина ξ розподілена за геометричним законом. Знайти характеристичну функцію $f_\xi(t)$ величини ξ. За її допомогою обчислити математичне сподівання і дисперсію ξ.

П9.2 Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом. Знайти характеристичну функцію $f_\xi(t)$ величини ξ. За її допомогою обчислити математичне сподівання і дисперсію ξ.

П9.3 Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні та розподілені за законом $Geom(p)$. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

П9.4 Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні та розподілені за законом $Exp(\lambda)$. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

П9.5 Знайти характеристичну функцію стандартного розподілу Коші. За допомогою властивостей записати характеристичну функцію розподілу Коші з довільними параметрами. Показати, що розподіл Коші – стійкий.

П9.6 Довести, що характеристична функція парна тоді і лише тоді, коли розподіл випадкової величини симетричний.

П9.7 Нехай ξ і η – незалежні, однаково розподілені випадкові величини з характеристичною функцією φ. Знайти характеристичну функцію випадкової величини $\xi - \eta$.

П9.8 Знайти розподіли, яким відповідають наступні характеристичні функції

а) $cost$; б) $cos^2 t$; в) e^{-t^2}; г) $e^{-|t|}$; д) $\frac{1}{1+t^2}$; е) $\frac{1}{1-it}$; ж) $\frac{sint}{t}$.

П9.9 Чи є функції характеристичними? Обґрунтувати відповідь. а) $sint$; б) e^{-t^4} ; в) $e^{-i|t|}$; г) $\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$.

П9.10 Випадкові величини ξ і η розподілені за законом $\xi \sim \chi^2(n)$ і $\eta \sim \chi^2(m)$. Який закон розподілу їх суми $\zeta = \xi + \eta$.

П9.11* Знайти твірну функцію випадкової величини, що розподілена за геометричним законом.

П9.12* Знайти закони розподілу, яким відповідають такі твірні функції: а) $\frac{(1+z)^2}{4}$; б) $\frac{1}{2(1-z/2)}$.

9.13 Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом. Знайти твірну функцію моментів випадкової величини. За її допомогою обчислити математичне сподівання і дисперсію ξ.

2.10. Центральні граничні теореми

П10.1 В математичному приладі додається 1000 чисел, кожне з яких округлено з точністю до 0.001. Припускається, що похибки округлення незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[-0.005; 0.005]$. Знайти проміжок, в якому з імовірністю 0.998 міститься сумарна похибка.

П10.2 Кількість X сонячних діб за рік для даної місцевості є випадковою величиною з середнім значенням 100 діб і середньоквадратичним відхиленням 20 діб. Оцінити зверху ймовірність таких подій : $\{A: X \geq 150\}$ та $\{B: X \geq 200\}$.

П10.3 Випадкова величина η є середньою арифметичною 10000 незалежних, однаково розподілених випадкових величин, середнє квадратичне відхилення кожної з яких дорівнює двом.
Яке максимальне відхилення величини η від її математичного сподівання можна очікувати з імовірністю, не меншою, ніж 0.9544 ?

П10.4 В освітлювальну мережу паралельно включено 20 ламп. Імовірність того, що за час T лампа буде увімкнена, дорівнює 0.8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю увімкнених ламп X та середньою кількістю (математичним сподіванням) увімкнених ламп за час T виявиться: а) менше трьох; б) не менше трьох.

П10.5 У партії з $n = 22500$ виробів кожен виріб незалежно від інших може бути бракованим з імовірністю $p = 1/5$. Знайти ймовірність того, що кількість μ бракованих виробів знаходиться між 4380 та 4560.

П10.6 Припустимо, що вимірювання має середнє значення μ і дисперсію $\sigma^2 = 25$. Нехай X буде середнім n таких незалежних вимірювань. Наскільки великим має бути n, щоб $P(|\underline{X} - \mu| < 1) = 0.95$?

П10.7 Кожна із $n = 100$ незалежних випадкових величин ξ_i має рівномірний розподіл на проміжку [0,10]. Записати наближено закон розподілу для випадкової величини $\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

П10.8* Згенеруйте послідовність $U_1, U_2, \dots, U_{1000}$ незалежних рівномірних випадкових величин на комп'ютері. Нехай $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ для $n = 1,2, \dots,$ 1000. Побудуйте графік

залежності наступних величин від n: а) S_n; б) S_n/n; в) $S_n - n/2$; г) $(S_n - n/2)/n$; д) $(S_n - n/2)/\sqrt{n}$.

Поясніть форми отриманих графіків, використовуючи поняття з розділу про ЦГТ.

П10.9 Відомо, що ймовірність народження хлопчика 0.515. Яка ймовірність того, що серед 10000 новонароджених кількість хлопчиків буде не більше, ніж дівчаток?

П10.10* (Випадкові блукання)
П'яниця виконує йде таким чином: щохвилини він робить крок на північ або південь, з імовірністю 1/2 кожен, і напрямки його послідовних кроків є незалежними. Довжина його кроку 50 см. Використайте центральну граничну теорему, щоб приблизно визначити розподіл ймовірностей його місцезнаходження через 1 годину. Де він, швидше за все, буде?

П10.11** Береться дві посудини *A* та *B*, кожна з яких має об'єм 1 дм^3 і містить $2.7 \cdot 10^{22}$ молекул газу. Ці посудини з'єднують так, що між ними відбувається вільний обмін молекулами. Чому дорівнює ймовірність того, що через одну добу в одній з посудин молекул виявиться принаймні на одну десятимільярдну частину більше, ніж в іншій?

П10.12 На вулиці стоїть людина і продає газети. Припустимо, що кожен, хто проходить повз неї, купує газету з ймовірністю 1/3. Нехай ξ означає кількість людей, що пройшли повз продавця за час, поки він продав перші 100 примірників газет. Знайти наближений розподіл ξ.

П10.13 Припустимо, що кількість дорожніх пригод N за певний проміжок часу має розподіл Пуассона з математичним сподіванням 100. Використовуючи нормальне наближення до розподілу Пуассона, знайдіть Δ таке, що $P(100 - \Delta < N < 100 + \Delta) \approx 0.9$.

П10.14* Нехай $X_1, X_2, \ldots$ — послідовність випадкових величин така, що
а) $P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}$; б) $P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$.
Чи збігається X_n за ймовірністю?

П10.15* Припустимо, що $X_n \sim N(0,1/n)$, і нехай X – випадкова величина з функцією розподілу $F(x) = 0$, якщо $x < 0$, і $F(x) = 1$, якщо $x \geq 0$.
Чи збігається X_n до X за ймовірністю? Чи збігається X_n до X за розподілом?

Приклад контрольної роботи № 2

1. Знайти коефіцієнт кореляції між ξ та $\eta = \ln|\xi|$, ии якщо величина ξ має стандартний нормальний розподіл.

2. Густина ймовірності двовимірної випадкової величини (ξ, η):

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & x^2 + y^2 \le a^2 \\ 0, & \text{інше} \end{cases}.$$

Знайти математичні сподівання $\mathrm{M}\xi, \mathrm{M}\eta$, дисперсії $D\xi, D\eta$ та коефіцієнт кореляції ξ та η. Чи є вони незалежними?

3. Нехай випадкові величини ξ та η незалежні і мають стандартний нормальний розподіл. Знайти густину розподілу випадкової величини $\xi - \eta$.

4. Гральний кубик кинуто 100 раз. Знайти межі, в яких з імовірністю більше 0.97 лежить сумарна кількість очок.

Розділ 3

3.12. Вибірки та їх характеристики.

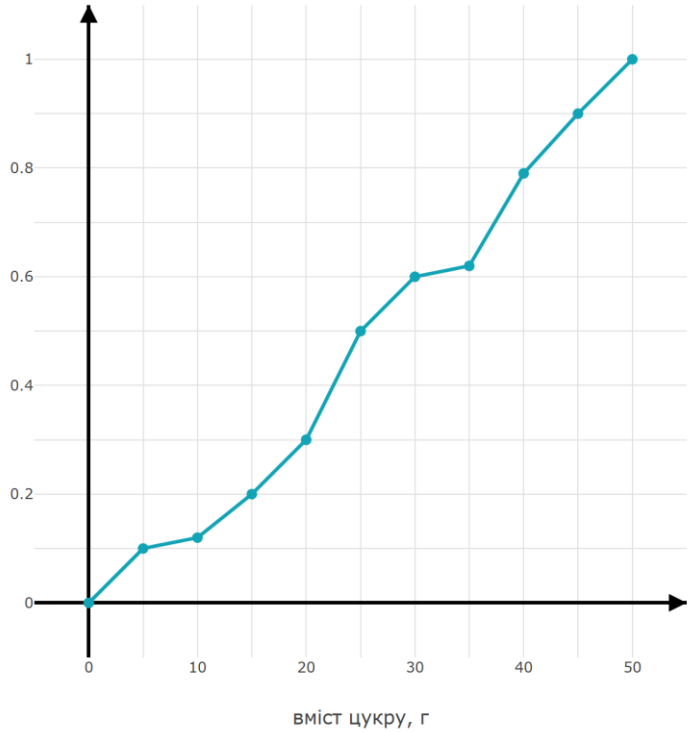
П12.1 Рівень опадів за 45 діб спостереження (у мм): 1.2, 0.0, 5.4, 12.1, 8.5, 3.2, 0.5, 15.6, 2.1, 4.7, 0.0, 9.3, 6.8, 1.1, 25.4, 18.2, 0.0, 3.5, 7.4, 11.0, 5.2, 0.8, 1.9, 14.3, 6.1, 0.0, 2.7, 4.9, 8.8, 10.5, 3.1, 1.4, 0.0, 7.6, 13.2, 5.5, 2.2, 0.6, 9.1, 4.3, 1.8, 12.7, 0.0, 6.4, 3.9. Побудувати гістограму частот та діаграму розмаху (*box-and-whisker plot)* для представлених даних. Чи можна якісь значення вважати викидами? На скільки відсотків міжквартильний інтервал відрізняється від вибіркового середньоквадратичного відхилення?

П12.2 Кількість грозових днів на місяць протягом 3 років (36 місяців): 0, 1, 4, 6, 8, 3, 0, 0, 2, 5, 7, 2, 0, 2, 5, 9, 10, 4, 1, 0, 3, 6, 8, 1, 0, 1, 4, 7, 5, 2, 0, 3, 6, 2, 1, 0. Побудувати емпіричну функцію розподілу та полігон частот. Знайти вибіркову середню, дисперсію, моду та медіану.

П12.3 Виміряно вагу 50 яблук сорту «Голден» (у грамах): 152, 164, 145, 178, 160, 155, 162, 170, 148, 153, 166, 159, 172, 149, 161, 157, 168, 154, 163, 150, 158, 175, 147, 165, 156, 171, 146, 160, 152, 167, 155, 162, 174, 151, 159, 164, 149, 169, 153, 161, 157, 170, 148, 166, 154, 163, 150, 172, 158, 165. Вибрати кількість інтервалів, побудувати гістограму частот і відносних частот. Знайти вибіркову середню, дисперсію, моду та медіану. Побудувати діаграму розмаху.

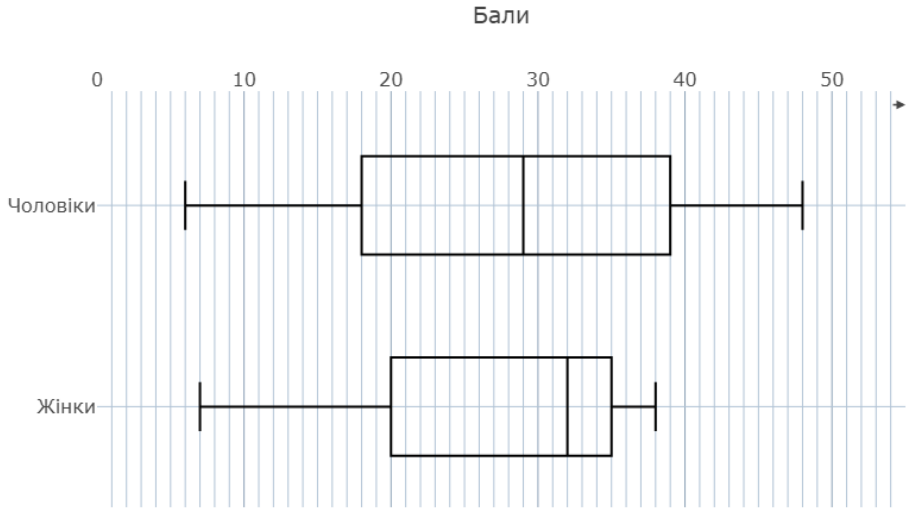
П12.4 При дослідженні точності вимірювального приладу було проведено n = 30 (100) вимірювань. Обчислена за результатами зміщена дисперсія становить s = 0.8. Знайти незміщену оцінку дисперсії помилок приладу. На скільки відсотків зміщена дисперсія відрізняється від незміщеної?

П12.5 Дієтологи виміряли вміст цукру (у грамах) у напоях популярної кав'ярні. Кумулятивна відносна частота для цих даних показана нижче.



Оцініть медіану розподілу і перцентиль, якій відповідає 15 грамам цукру в напої. Яка найкраща оцінка міжквартильного діапазону розподілу?

П12.6 При прийомі на роботу пропонували пройти тест, в результаті проходження якого можна було отримати від 0 до 50 балів. Результати оцінювались окремо для чоловіків і жінок, вони відображені на графіках:



Для чоловіків визначте медіану, міжквартильний діапазон та розмах оцінок за тест. Порівняйте графіки оцінок, отриманих жінками і чоловіками. Що Ви можете сказати про відмінності між оцінками?

П12.7 Дві служби доставки, «Швидко» та «Вчасно», надали дані про час доставки замовлень (у хвилинах). Служба «Швидко»: мінімум — 15, $Q_1 = 25$, медіана — 35, $Q_3 = 45$, максимум — 60. Служба «Вчасно»: мінімум — 25, $Q_1 = 30$, медіана — 32, $Q_3 = 35$,

максимум — 40. Визначте міжквартильний діапазон для обох служб. Яка служба є більш передбачуваною у часі доставки? Поясніть чому Ви так вважаєте. Якщо вам важливо отримати замовлення якомога швидше, яку службу ви оберете?

П12.8 Вважаємо, що в групі 16 студентів, які сидять на 4 рядах по 4 в ряд. Це генеральна сукупність. Щоб отримати вибірку з 4 студентів, ми підкидаємо 2 різні монети. Залежно від результату в вибірку потрапляють студенти відповідного ряду. Який це тип вибору? Як ви могли б отримати просту випадкову вибірку з 4 студентів групи. Чому четверо студентів, які запізнилися, не обов'язково утворюватимуть випадкову вибірку? Чому четверо студентів, які сидять у задньому ряду, не обов'язково утворюватимуть випадкову вибірку?

П12.9 Голова ОСББ хоче дізнатися ставлення мешканців 100-квартирного будинку до встановлення відеоспостереження. Він кидає номери всіх квартир у капелюх, перемішує їх і витягує 10 номерів. Який це тип вибірки? Чи зміниться тип вибірки, якщо він вирішить опитати лише мешканців першого поверху, бо йому так швидше? Як можна змінити спосіб опитування, щоб вибірка була систематична? Чи є всі ці вибірки репрезентативними?

П12.10 Розглянемо числа: 2, 3, 4, 5, 5. Обчисліть моду, медіану та середнє значення.
а) Якщо ці числа є кодами кольорів футболок, замовлених з каталогу, які з цих величин матимуть сенс?
б) Якщо ці числа позначають відстані у кілометрах до різних сіл (в один кінець), які з цих величин матимуть сенс?
(в) Припустимо, числа відображають відповіді в опитуванні за шкалою від 1 до 5, де 1 – рішуче не погоджуюсь, а 5 – повністю погоджуюсь. Які середні значення будуть корисними в цьому випадку?

П12.11 Досліджується ефективність відбілювального гелю для зубів. У дослідженні беруть участь 85 дорослих, з них 43 людини отримують гель з відбілювальними компонентами, 42 людини отримують схожий за виглядом гель, але без відбілювальних речовин (плацебо). Колір зубів усіх учасників оцінюватиметься за стандартною методикою, після чого результати двох груп порівняють. Як організувати подвійний сліпий експеримент?

П12.12 Психологи досліджують, чи допомагає спеціальний трав'яний збір зменшити рівень тривоги перед іспитом. Студенти розділені на дві групи: перша п'є тестовий чай, друга — звичайний чай з подібним ароматом. Рівень тривоги оцінюється за допомогою анкетування та вимірювання пульсу. Опишіть, як організувати контрольну групу та плацебо в цій ситуації. Чому важливо, щоб асистент, який вимірює пульс, не знав складу чаю, який пив студент?

П12.13 Нехай $x_1, \dots, x_n$ – вибірка із показникового розподілу із густиною $p(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-m}{\theta}}, & x \geq m \\ 0, & x < m \end{cases}$, де $\theta > 0$, а m – відоме. Чи є $\hat{\theta} = \overline{X} - m$ ефективною оцінкою параметра θ?

П12.14. Методом максимальної правдоподібності знайти оцінку параметра λ показникового розподілу $p(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0, x > 0)$, якщо в результаті n експериментів випадкова величина прийняла значення $x_1, \dots, x_n$. Перевірити оцінку на незміщеність та ефективність.

П12.15 Вас цікавить вага рюкзаків, які школярі носять на заняття, і Ви хочете провести дослідження.
а) Запропонуйте метод відбору, щоб вибірка була максимально репрезентативною, якщо Ви вирішили обмежитись 30 учнями. Які фактори можуть вплинути на результат і як їх можна врахувати?
б) Надайте інструкції щодо зважування рюкзаків. Вкажіть одиницю вимірювання, точність вимірювання та тип вагів.
в) Як Ви вважаєте, чи вплине попереднє повідомлення учнів про те, що Ви збираєтеся зважити їхні рюкзаки, на результати вимірювань?

3.13. Інтервальні оцінки. Перевірка гіпотез.

П13.1 Проведено 10 вимірювань вмісту цукру в партії соку. Середнє арифметичне результатів склало $\bar{x} = 12\%$. Вважаючи, що похибка приладу розподілена за нормальним законом із $\sigma = 0.2\%$, визначте довірчий інтервал для істинного вмісту цукру з надійністю 0.95.

П13.2 Яким має бути мінімальний об'єм вибірки, щоб із надійністю 0.95 точність оцінки середньої ваги пачки печива була $\delta = 2$ грами? Відомо, що вага розподілена нормально із середньоквадратичним відхиленням $\sigma = 10$ грамів.

П13.3 Для визначення концентрації певної речовини в розчині було проведено 12 незалежних вимірювань. Середнє арифметичне результатів склало $\bar{x} = 22.5$ мг/л, а виправлене середньоквадратичне відхилення $s = 1.2$ мг/л. Оцініть істинний вміст речовини в розчині з надійністю 0.98. Припустити нормальний розподіл результатів вимірювань.

П13.4 Для радіоактивного джерела з великим періодом піврозпаду вимірювали інтервали часу t (у секундах) між двома послідовними актами розпаду. Всього зафіксовано 400 інтервалів. Середній час між розпадами $\bar{t} = 2\ c$.

Інтервал часу t (с)	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	> 5
Кількість інтервалів ν_i	158	95	62	38	25	22

Перевірити, чи узгоджуються дані з показниковим законом розподілу $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, де $\lambda = 1/\bar{t}$. Рівень значущості $\alpha = 0.01$.

П13.5 У випадкові вибірці з 62 професійних акторів виявилось 39 екстравертів. Знайдіть точкову та інтервальну (з надійністю 0.95) оцінку для ймовірності p того, що випадковий актор є екстравертом. Чи виконуються умови np>5 і nq>5 для цієї задачі? Для чого вони потрібні? Які ще умови важливі для обчислення статистичної ймовірності події?

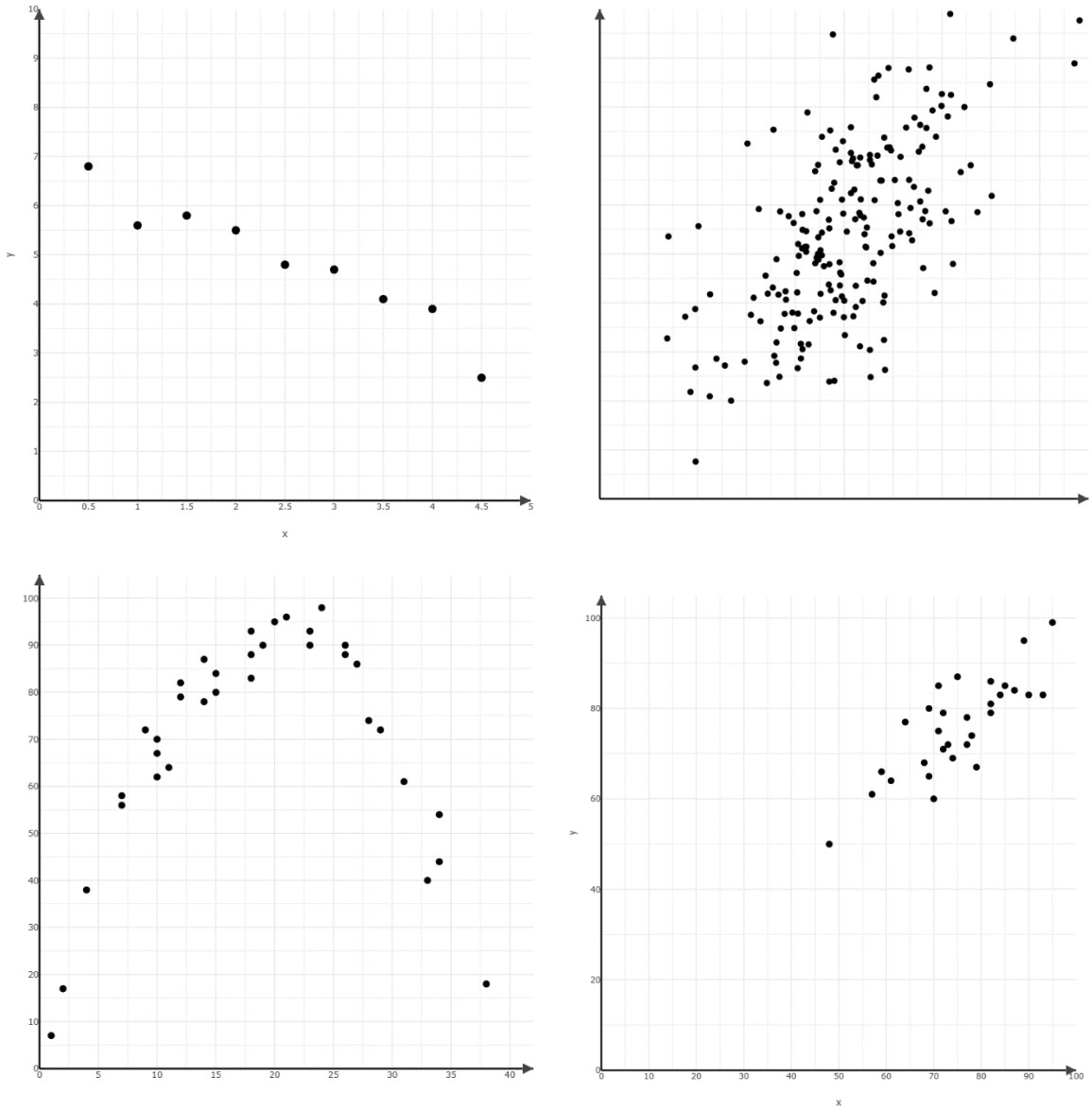
П13.6 За вибірками обсягів $n = 30$ і $m = 40$, вибраних із нормально розподілених генеральних сукупностей із відомими дисперсіями $D(X) = 60$ і $D(Y) = 80$, знайдені вибіркові середні $\bar{x} = 130$ і $\bar{y} = 125$. Перевірити гіпотезу про рівність середніх при рівні значущості $\alpha = 0.05$.

П13.7 За вибірками обсягів $n = 12$ і $m = 15$, вибраних із нормально розподілених генеральних сукупностей X і Y, знайдені виправлені дисперсії $s_x^2 = 11.41$ і $s_y^2 = 6.52$. Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій при рівні значущості $\alpha = 0.5$.

П13.8 Випишіть 50 випадкових, на ваш погляд, чисел з відрізка $[0; 1]$ (для визначеності з чотирма знаками після коми). Якщо запропоновані числа справді випадкові, то вони мають бути рівномірно розподілені на проміжку $[0; 1]$. За критерієм Пірсона, з'ясуйте, чи можна отриману послідовність вважати випадковою. Виписуючи цифри, не користуйтесь допоміжними засобами, не використовуйте і не переглядайте написане раніше.

3.14. Елементи теорії кореляції.

П14.1 На графіках зображене кореляційне поле 2 випадкових величин. Оцініть залежність між ними: лінійна, нелінійна, додатня, від'ємна, сильна, слабка.



П14.2 Емма прочитала, що медитації перед сном допомагають від безсоння. В таблиці наведені дані скільки хвилин тривала медитація і скільки Емма в цю ніч спала.

медитація (хв)	4	8	10	4	18	4	8	10	14
сон (г)	4.5	8	8.5	6	10	7	8	7	6

Побудувати кореляційне поле і кореляційну таблицю.

П14.3 За даними задачі П14.2 знайдіть емпіричну функцію регресії $y = kx + b$. Що значать коефіцієнти k і b в формулі? Визначте силу залежності величин за шкалою Чеддока.

П14.4 За допомогою даних задач П14.2 і П14.3 перевірити гіпотезу, що медитації не збільшують тривалість сну, з рівнем значущості 0.05.

П14.5 Менеджер кав'ярні аналізує, як температура повітря на вулиці впливає на кількість проданих порцій морозива.

Температура (°C)	21	22	25	20	28	32	18	24	29
Продано морозива (шт)	20	35	45	30	60	85	10	40	42

Побудувати кореляційне поле, позначте на ньому рівняння регресії $y = kx + b$. Визначте, на скільки одиниць в середньому зростають продажі при підвищенні температури на 1 градус. Чи можна якісь точки вважати викидами?
На рівні значущості 0.05 перевірити гіпотезу про статистичну значущість впливу температури на обсяг продажів.

П14.6 Досліджується зв'язок між рівнем холестерину в крові X (ммоль/л) та виникненням серцевого нападу протягом року. Ознака S — напад був (Y), нападу не було (N).

Особа	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Холестерин (X)	4.2	6.8	5.5	7.2	4.8	6.1	5.9	7.5	5.0	6.4
Ознака (S)	N	Y	N	Y	N	Y	N	Y	N	Y

Згрупувавши дані за ознакою S, оцінити за допомогою вибіркового кореляційного відношення (емпіричного коефіцієнту детермінації) силу зв'язку між рівнем холестерину та ризиком серцевого нападу.

П14.7. Два викладачі оцінили знання 12 студентів (максимум=100) і виставили їм такі оцінки (перший рядок – перший викладач, другий– другий):

98	94	88	80	76	70	63	61	60	58	56	51
99	91	93	74	78	65	64	66	52	53	48	62

Знайти коефіцієнт рангової кореляції Спірмена між оцінками двох викладачів.

П14.8 Група з 10 волонтерів вела облік годин фізичної активності на тиждень T та вимірювала свій середній пульс у стані спокою P (ударів за хвилину).

Активність, год/тиждень	1	2	3	5	7	8	10	2	4	6
Пульс, уд/хв	82	80	75	72	68	65	60	78	74	70

Знайдіть коефіцієнт кореляції Пірсона. Побудуйте 95% довірчий інтервал. Як напрямок кореляції (позитивна/негативна) інтерпретується в контексті здоров'я?

П14.9 Протягом останніх 50 років спостерігається сильний негативний зв'язок між середньорічним доходом і рекордним часом, за який пробігають 1 кілометр. Іншими словами, середні доходи зростали, тоді як рекордний час зменшувався.
Чи вважаєте ви, що зростання доходів спричиняє зменшення часу у бігу? Які приховані змінні можуть впливати на зміну однієї або обох змінних?

П14.10 Соціологічне дослідження, проведене в університеті Еморі, дало несподіваний результат. Змінна X: Вартість весілля (у тис. доларів). Змінна Y: Тривалість шлюбу (в роках). Кількість досліджених пар 200. Коваріаційна матриця:
$C = \begin{pmatrix} 7.06 & -2.20 \\ -2.20 & 5.11 \end{pmatrix}$.
Розрахуйте за цими даними коефіцієнт кореляції (Пірсона), визначте тип кореляції. Зробіть прогноз тривалості шлюбу для подружжя, яке витратило на весілля 5 тис. доларів.

П14.11 Нехай відома статистика (логи сервера) по двом параметрам: завантаження CPU в % (X) і споживання енергії в Вт (Y), кількість логів N=100.
$\sum \left(x_i - \underline{x}\right)^2 = 18041.58$, $\sum \left(y_i - \underline{y}\right)^2 = 60001.53$, $\sum \left(x_i - \underline{x}\right)\left(y_i - \underline{y}\right) = 26278.07$.
1) Розрахувати за цими даними коваріаційну матрицю.
2) Знайти перший власний вектор матриці. Показати, що його напрямок не співпадає з напрямком прямої регресії.
3) Знайти рівняння головної компоненти (одного параметра, який характеризує завантаження сервера і є лінійною комбінацією X і Y).

П14.12* Студент 3 курсу механіко-математичного факультету запропонував своїй одногрупниці одружитися. Дівчина йому відмовила, аргументуючи тим, що практично всі студентські шлюби закінчуються розлученням. Які дослідження може провести хлопець, щоб переконати її за допомогою математичної статистики?

Відповіді

П1.1

П1.6 19/24. **П1.7** а) так, б) ні. **П1.8** 19/95. **П1.9** 71/190. **П1.10** а) 0.504; б) 0.432; в) 0.027; г) 0.036; д)0.001. **П1.11** а) $\frac{2}{n-1}$; б) $\frac{1}{n-1}$. **П1.12** 0.00109. **П1.13** 0.3053. **П1.14** 4/35. **П1.15** 1/3024. **П1.16** 2/35. **П1.17** 1/360. **П1.18** $2 \cdot 6!$ **П1.19** 0.367; 0.00035. **П1.20** 78. **П1.21** а) 1/32; б) 1; 2; в) 1:1. **П1.23** 0.26; 0.22. **П1.24** 10^{-20}; 0.3%; $2.2 \cdot 10^{11}$ років. **П1.25** 8/9; 4/5. **П1.26** Для 27: а)0.222; б) 0.444. Для 1000: а) 0.384; б) 0.096. **П1.27** 0.24. **П1.28** 3+1;15+6. **П1.29** а) 1/8; б) 0.632117. Для $n \to \infty$ а) 0; б)$1 - \frac{1}{e} \approx 0.6321205$. **П1.30** 0.1; 0.6. **П1.31** $P(AB) = 5/36$; $P(A + B) = 2/3$; $P(A\bar{B}) = 13/36$. **П1.32** 0.00012. **П1.33** 0.9375. **П1.34** 1296. **П1.35** а) 0.4; б) 0.4; в) 0.1. **П1.36** 125/1296; 11/36. **П1.37** а) C_{30}^3; б) C_{30}^{27}; в) 2^{30}; г) 15:15.

П1.2

П2.1 0.005. **П2.2** (π-2)/4. **П2.3** 2/3. **П2.4** 11/36. **П2.5** 107/288. **П2.6** а) 2/27, 1/2; б)19/27, 1. **П2.7** 1/4. **П2.8** 1/2. **П2.9** $1-2R/a$. **П2.10** 1/3. **П2.11** 2R/$\sqrt{3}$. **П2.12** 2/3. **П2.13** 1/4; 1/3; 1/2. **П2.21** а) ні; б) так. **П2.22** 1/4; 1/2; 1/2. **П2.24** 19/27. **П2.25** 0.328. **П2.26** 1/5, 3/5, 4/7. **П2.27** 3/4. **П2.28** 0,3; 0,6. **П2.30** а)1/10; б)4/25. **П2.31** 0.159. **П2.32** а) ні; б) так.

П1.3

П3.1 0.19. **П3.2** 5.4%. **П3.3** 1/3. **П3.4** 49/57. **П3.5** С. **П3.6** а)$\alpha_1\alpha_2$; б)$\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2$. **П3.7** 38/105. **П3.8** а) 11/20; б) 0.1*(1/4)^k+0.6*(1/2)^k+0.3*(3/4)^k. **П3.9** 13/132. **П3.10** 158/177. **П3.11** а) 0.198; б) 0.297. **П3.12** 15/17. **П3.13** 9/16. **П3.14** 7/18. **П3.15** (2n+1)/3n.

П1.4

П4.1 а) 7/8; б) 2/3. **П4.2** 1/3. **П4.3** а) $\prod_i p_i$; б) $1-\prod_i (1-p_i)$. **П4.4** а) 4; б) 13; в) 20. **П4.6** 99; 22. **П4.7** 0.41 П4.8 0.23. **П4.12** 0.00135. **П4.13** 1; 0,92. **П4.14** 50/243. **П4.16** 1/2. **П4.17** 1. **П4.18** 2. **П4.19** а) $\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$; б) $\frac{[\lambda(1-p)]^{10}e^{-\lambda(1-p)}}{10!}$. **П4.20** $\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$.

П2.6

П6.2 $P(\xi \le 2) = 0.9$. **П6.3** Розподіл Пуассона з $\lambda = 3$. $Mo = 2$ або 3. **П6.4** $F(x) = 1-0.98^{[k]}, k < x \le k+1, k = \{1,2,3,\dots\}$; $Mo = 1$; $P(\xi > 10) = 1-F(11) \approx 0.81$. **П6.5** а) $\eta = \{-9,-1,1,5\}$ з ймовірностями $P = \{1/4, 1/6, 1/3, 1/4\}$; б) $\eta = \{-2,0,28\}$ з ймовірностями $P = \{1/3, 5/12, 1/4\}$; в) $\eta = \{1/4, 1, 2, 32\}$ з ймовірностями $P = \{1/4, 1/3, 1/6, 1/4\}$; г) $\eta = \{1,5\}$ з ймовірностями $P = \{3/4, 1/4\}$. **П6.6** $\xi = \{0,1,2,3,4,5\}$ з ймовірностями $P = \{1/6, 5/18, 2/9, 1/6, 1/9, 1/18\}$. **П6.7** $\xi = \{2,3,4\}$ з ймовірностями $P = \{0.3, 0.2, 0.5\}$, $\eta = \{3,8,15\}$ з ймовірностями $P = \{0.3, 0.2, 0.5\}$. **П6.8** $F(x) = \{$ 0 при $x \le 0, 1-p$ при $0 < x \le 1, 1$ при $x > 1\}$. **П6.9** 1/2. **П6.10** а) ні; б) ні; в) так. **П6.11** а) так; б) ні; в) так; г) ні. **П6.12** в),д). **П6.13** $a = 1/2, b = 1/\pi$, $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. **П6.14** $p(v) = 1/\left(3av^{2/3}\right), 0 < v < a^3$. **П6.15** $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$, $x \in [-R, R]$. **П6.16** $B = \frac{15\,h^4}{\pi^4\,k^4\,T^4}$, $p(\lambda) = \frac{Bc^4}{\lambda^5(exp(hc/\lambda kT)-1)}$. **П6.17** При $a > 0$ $F_\eta(y) = F_\xi(\frac{y-b}{a})$; при $a < 0$ $F_\eta(y) = 1-F_\xi(\frac{y-b}{a})$. **П6.18** $f_\eta(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$, $y > 0$. **П6.19** $N(0,1)$. **П6.20** $\alpha e^{-\alpha x}$ при $x > 1, \alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$ при $x \in [0,1]$. **П6.21** а) Графік зміститься праворуч на 2; б) графік розтягнеться вдвічі вздовж Ох. **П6.22** а) Графік зміститься праворуч на 2; б) графік розтягнеться вдвічі вздовж Ох і одночасно стиснеться вдвічі вздовж Оу. **П6.23** $p_A(a) = \frac{1}{2a\sqrt{a-a^2}}$, $a \in [0.5,1]$.

П2.7

П7.2 а)$e^{-2} - e^{-9/2}$; б) $(\Phi(1) - \Phi(-1))^2$. **П7.3** а) $\xi \sim N(0,2), \eta \sim N(0,5)$; б) $p(x|y) = \sqrt{\frac{5}{2\pi}} e^{-5(x-0.6y)^2/2}, p(y|x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-(y-1.5x)^2}$; в) $N(0,13)$; г) $p(u,v) = \frac{1}{4\pi} e^{-(u^2+6uv+13v^2)/8}$. **П7.4** $4x^{-5}$ $(x \geq 1)$. **П7.5** Полярні – так, декартові – ні.

П7.6 $p(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ x/16, 0 \leq x < 2, \\ 1/8, 2 \leq x < 8, \\ (10-x)/16, 8 \leq x < 10, \\ 0, x \geq 10. \end{cases}$

П7.7 а) $xe^{-x} (x \geq 0)$, б) $e^{-|x|} (-\infty < x < \infty)$, в) $e^{-x} (x \geq 0)$, г) $\frac{1}{1+x^2} (x \geq 0)$.

П7.8 $p(z) = \frac{1}{bd} ln\left(\frac{bd}{z}\right), 0 < z < bd$. **П7.9** $p(z) = 2/\pi(4+z^2)$.

П7.11 $\zeta \sim Exp(1/2) = \chi^2(2)$. **П7.14** $\chi = \{-1, 0, 1, 2\}$ з ймовірностями $P = \{0.03, 0.27, 0.07, 0.63\}$. **П7.15** $p_\eta(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ або $t(n)$.

П2.8

П8.1 20грн. **П8.2** $M\xi = 1.2$, $D\xi = 0.96$. **П8.3** $M\xi = 5$, $D\xi = 20$. Для 6 пострілів $M\xi \approx 3.7$, $D\xi \approx 3.9$. **П8.4** 46. **П8.5** $M(E) = \frac{a}{2} + \frac{ae^{ab}}{e^{ab}-1}$, $D(E) = \frac{a^2}{e^{ab}+e^{-ab}-2}$. **П8.6** $(n-1)^k/n^{k-1}$. **П8.7** $p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. **П8.8** $M\xi = 3$, $D\xi = 4$. **П8.9** $M(\xi - 3\eta) = -1$; $D(\xi - 3\eta) = 28$. **П8.10** $M\zeta = -6$, $D\zeta = 20$. **П8.11** $MS = \frac{\pi}{4}(a^2 + \frac{\delta^2}{3})$; $DS = \frac{\pi^2\delta^2}{12}(a^2 + \frac{\delta^2}{15})$. **П8.12** -0.2. **П8.14** $M(X) = \frac{ka}{a+b}$; $D(X) = \frac{kab(a+b-k)}{(a+b)^2(a+b-1)}$. **П8.15** $ab/4$; $7a^2b^2/144$. **П8.17** $A = \frac{1}{6}\left(\frac{h}{kT}\right)^4$; $Mo = \frac{3kT}{h}$; $M\nu = \frac{4kT}{h}$; $Me = 3.67\frac{kT}{h}$. **П8.18** $M[\xi] = 0$, $D[\xi] = 0.6$; $M[\eta] = 0.65$, $D[\eta] = 0.23$. Коефіцієнт кореляції: $\rho_{\xi\eta} = 0$. Ні, залежні. $M[\chi] = 0.65$, $D[\chi] = 9.835$

П2.9

П9.1 $f_\xi(t) = \frac{p\,e^{it}}{1 - q\,e^{it}}$, $M(\xi) = \frac{1}{p}$, $D(\xi) = \frac{q}{p^2}$. **П9.2** $f_\xi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$, $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, $D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$. **П9.3** $NB(n,p)$. **П9.4** $\Gamma(n,\lambda)$. **П9.5** $e^{-|t|}$; $e^{itx_0-|t|}$. **П9.7** $|\phi(t)|^2$. **П9.8** а) $x = \{-1, 1\}$ з ймовірностями $P = \{1/2, 1/2\}$; б) $x = \{-2, 0, 2\}$ з ймовірностями $P = \{1/4, 1/2, 1/4\}$; в) $N(0, 1/2)$; г) C(0,1); д) $Lap(0,1)$; е) $Exp(1)$; ж) $U[-1,1]$. **П9.9** а) ні, б) ні, в) ні, г) так. **П9.10** $\zeta \sim \chi^2(n+m)$. **П9.11** $\frac{p}{1-qz}$. **П9.12** $x = \{0, 1, 2\}$ з ймовірностями $P = \{1/4, 1/2, 1/4\}$. **П9.13** $m_\xi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, $D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$.

П2.10

П10.1 $[-0.0283; 0.0283]$. **П10.2** $P(A) \le 0.16; P(B) \le 0.04$. **П10.3** 0.04. **П10.4** а) $P\{|-16| < 3\} \ge 0.36$; б) $P\{|-16| \ge 3\} \le 0.64$. **П10.5** 0.8185. **П10.6** 97. **П10.7** $\eta \sim N(5, 12)$. **П10.9** 99.87%. **П10.11** 0.968. **П10.12** $\xi \sim N(300{,}600)$. **П10.13** $\Delta \approx 16.45$. **П10.15** Так, так.

ПЗ.12

П12.4 $\sigma^2 = 0.8276$, 3.33% (для 100: $\sigma^2 = 0.808$, 1%). **П12.5** $Me = 25$ г, 20-й перцентиль, $IQR = 20.5$ г. **П12.13** Так. **П12.14** $\lambda = \frac{1}{\bar{x}}$; незміщена і ефективна.

ПЗ.13

П13.1 (11.876%, 12.124%). **П13.2** 97. **П13.3** (21.56, 23.44) мг/л. **П13.4** $\chi^2_{\text{сп}} = 4.76 < \chi^2_{\text{кр}} = 13.28$, узгоджуються. **П13.5** $p \approx 0.63$, $p = (0.51, 0.75)$, виконуються. **П13.6** $|Z_{\text{сп}}| = 2.5 > 1.96$, відхиляється. **П13.7** $F_{\text{сп}} = 1.75 < 2.57$, немає підстав відхилити нульову гіпотезу.

ПЗ.14

П14.3 $y = 0.212x + 5.338$, $r = 0.629$ – помітний звязок. **П14.4** $t_{\text{сп}} = 2.14 > t_{\text{кр}} = 1.895$, сприяють. **П14.5** $y = 4.37x - 65.52$, $r = 0.9$ – сильний звязок. $\text{t}_{\text{сп}} = 6.01 > \text{t}_{\text{кр}} = 2.365$, відхиляємо нульову гіпотезу. **П14.6** 0.843 – сильний зв'язок. **П14.7** $r_s = 0.92$. **П14.8** $r = -0.993$, $[-0.999; -0.969]$. **П14.10** $r = -0.31$, слабка від'ємна кореляція, 9 років. **П14.11** $C = \begin{pmatrix} 182.24 & 265.44 \\ 265.44 & 606.08 \end{pmatrix}$. Власний вектор: 2.078, нахил лінії регресії: 1.457, рівняння площини: $z = 0.434x + 0.901y$.

Список літератури

1. Єжов С. М., Шмельова Л. В. Задачі з теорії ймовірностей та математичної статистики : методи розв'язання : навч.-метод. посіб. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2013. – 172 с.
2. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі:Підручник для студентів вищих навчальних закладів.– Дніпропетровськ: ІМА-прес., 2014. – 556 с
3. Цибенко О., Тарасевич Ю. Я. Ймовірнісні методи в механіці : навч. посіб.– Суми : Сумський державний університет, 2013. – 240 с.
4. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв'язування задач : Навч. посібник. — К.: Центр учбової літератури, 2020. — 576 с.

5. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. Для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Полтава: «Довкілля-К», 2010. – 724с.
6. Brase Ch. H., Brase C. P. Understanding Basic Statistics. – Boston:Cengage, 2017. – 696p.
7. Wasserman L. All of statistics. A coincise course in statistical inference. – Springer, 2003. – 442p.
8. Rice J. A. Mathematical Statistics and Data Analysis, Third Edition. – USA, Boston:Thomson Brooks/Cole, 2007. – 668p.