Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Збірник задач з класичної електродинаміки. Частина 1. Математичні методи електродинаміки

Київ – 2024

Збірник задач з класичної електродинаміки. Частина 1. Математичні методи електродинаміки / Упорядники: Романенко О. В., Ледней М. Ф., Бєлих С. П. — Київ, 2024. – 94 с.

Рецензенти: Д. А. Гаврюшенко, доктор фіз.-мат. наук, професор,
С. Й. Вільчинський, доктор фіз.-мат. наук, професор.

Затверджено
вченою радою
фізичного факультету
<?> травня 2024 року

Зміст

Передмова

Курс класичної електродинаміки є одним із основних курсів теоретичної фізики, який вивчається студентами другого та третього курсів протягом двох семестрів на фізичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Під час вивчення цього курсу студенти поглиблюють своє розуміння електромагнітних явищ та законів, що лежать в основі сучасної фізики. Даний курс покликаний поглибити знання з класичної електродинаміки, одержані в курсі загальної фізики, засвоїти математичний апарат класичної теорії поля і на його основі – теорію електромагнітного поля Максвелла, її релятивістське представлення, та теорію електромагнітного поля в суцільних середовищах. Одним з ключових аспектів цього курсу є математичний інструментарій, необхідний для вивчення класичної електродинаміки. Цей інструментарій частково відновлюється з курсом математичної фізики, який студенти також вивчають одночасно. Важливими поняттями, які студенти повинні засвоїти перед вивченням класичної електродинаміки, є метод розділення змінних та властивості спеціальних функцій, таких як функції Бесселя та множини. Хоча попереднє знайомство з математичною фізикою може бути корисним для студентів, що вивчають класичну електродинаміку, цей факт не є обов'язковим. Важливо, щоб студенти мали можливість засвоїти необхідні математичні концепції під час вивчення самого курсу електродинаміки. Під час курсу студенти також мають можливість застосувати отримані знання до вирішення реальних фізичних проблем, що допомагає їм розширити своє розуміння та навички в області фізики. Крім того, вивчення класичної електродинаміки може викликати цікавість до розгляду більш складних розділів фізики, таких як квантова теорія поля та теорія відносності.

Автори висловлюють щиру подяку друзям і колегам з фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка за цінні зауваження та поради в написанні рукопису.

Частина I
Математичні методи електродинаміки

1.1 Векторний аналіз

Основні диференціальні операції у прямокутних декартових координатах виражаються з використанням векторного диференціального оператора, відомого як "набла"

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \,,$$

та мають вигляд

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \,, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \,, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \,. \tag{1.3}$$

Дія оператора $\vec{\nabla}$ на різні об'єкти визначається як їх функціональними властивостями, так і способом множення на цей оператор (для скалярних функцій множення — числове, для векторнозначних — скалярне, векторне або тензорне). По замовчуванню вважається, що оператор $\vec{\nabla}$ діє на найближчий з права від себе аргумент. Якщо неможливо впорядкувати множники саме в такий спосіб, то аргумент $\vec{\nabla}$, як правило, підкреслюють. Наприклад, $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \equiv \underline{\vec{A}} \cdot \vec{\nabla}$. Такої домовленості зручно дотримуватись для виконання проміжних алгебраїчних перетворень. АБО!!! Дотримання такої домовленості дозволяє зручно виконувати проміжні алгебраїчні перетворення.

Диференціальні операції над векторними тотожностями (об'єктами) є узагальненням відомого з математичного аналізу правила Лейбніца для диференціювання добутків функцій на випадок, коли множники є векторами. Як відомо, у математичному аналізі у випадку функцій однієї змінної правило Лейбніца записується у вигляді

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = f(x)\,\frac{d\,g(x)}{d\,x} + g(x)\,\frac{d\,f(x)}{d\,x} \,,$$

або, керуючись введеною вище домовленістю,

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\,g(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big[\underline{f(x)}\,g(x) + f(x)\,\underline{g(x)}\Big]$$

Потрібно відмітити, що кількість доданків у правій частині співпадає з числом множників у лівій. При такій формі запису непідкреслений множник вважається сталим і його можна винести за оператор похідної.

Аналогічний підхід використовують і при роботі з оператором $\vec{\nabla}$, де враховується тип множення (числове, скалярне чи векторне) при винесенні сталого множника за оператор диференціювання. Потім виконуються алгебраїчні перетворення з метою приведення похідної та її операнда до стандартного виду, щоб у подальших обчисленнях не виникало необхідності у використанні підкреслення.

Для обчислення похідних (градієнта, ротора, дивергенції та їх комбінацій) від явно заданих функцій можна використовувати два підходи. Перший полягає у записі функцій у декартових координатах і безпосередньому їх диференціюванні. Але для об'єктів, які можна подати у вигляді добутків, доцільно спочатку скористатися відповідною векторною тотожністю (правилом Лейбніца), щоб звести задачу до явного диференціювання найпростіших функцій.

При такому підході процедура пошуку градієнта, ротора та дивергенції аналогічна звичайному диференціюванню з використанням таблиці похідних елементарних функцій. Останні обчислюються попередньо, згідно з прямим означенням диференціальних операцій у декартових координатах. До "елементарних" похідних можна віднести, наприклад

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\,,\quad (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}\,,\quad \vec{\nabla}r\,,\quad \operatorname{div}\vec{r}\,,\quad \operatorname{rot}\vec{r}\,,$$

а також деякі вирази, коли функція під похідною залежить лише від $r = |\vec{r}|$, а саме

$$\varphi(r)\,,\quad \operatorname{div}\vec{A}(r)\,,\quad \operatorname{rot}\vec{A}(r)\,.$$

Інші задачі, приведені у даному розділі, зводяться до обчисленя похідних сум, добутків та часток комбінацій "елементарних" похідних.

Література: [10].

1.1.1 Задачі на доведення

Зауваження: у наступних задачах великі латинські літери позначають векторні функції радіус-вектора $\vec{r}$, а грецькі — скалярні функції $\vec{r}$.

1.1. Виходячи із означення диференціальних операцій, довести:

1) $\operatorname{div}\vec{\nabla}\varphi = \triangle\varphi\,;$ 2) $\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\operatorname{div}\vec{A} - \triangle\vec{A}\,;$

3) $\operatorname{rot}\vec{\nabla}\varphi = 0\,;$ 4) $\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\vec{A} = 0\,.$

Довести тотожності:

1.2. $\vec{\nabla}(fg) = g(\vec{\nabla}f) + f(\vec{\nabla}g)$.

1.3. $\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi$.

1.4. $\operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{A} + \left[\vec{\nabla}\varphi\times\vec{A}\right]$.

1.5. $\operatorname{div}\left[\vec{A}\times\vec{B}\right] = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}$.

1.6. $\operatorname{rot}\left[\vec{A}\times\vec{B}\right] = \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\operatorname{div}\vec{A} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$.

1.7. $\vec\nabla(\vec A\cdot\vec B)=\big[\vec A\times\,\mathrm{rot}\,\vec B\,\big]+\big[\vec B\times\,\mathrm{rot}\,\vec A\big]+(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A+(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B.$

1.8. $\vec\nabla\vec A^2=2(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec A+2\big[\vec A\times\,\mathrm{rot}\,\vec A\big].$

1.9. Довести $(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec A=\big[\,\mathrm{rot}\,\vec A\times\vec A\big]$, якщо довжина вектора $\vec A$ стала.

1.1.2 Задачі на обчислення

1.10. Обчислити[1]:

1) $\vec\nabla r\,;$	2) $\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)\,;$	3) $\vec\nabla r^n\,;$
4) $\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)r\,;$	5) $\vec\nabla\dfrac{\alpha}{r}\,;$	6) $\vec\nabla\ln r\,;$
7) $(\vec a\cdot\vec\nabla)\vec r;$	8) $\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)(\vec b\cdot\vec r)\,;$	9) $\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)f(r)\,;$
10) $\vec\nabla[\vec a\times\vec r]^2\,;$	11) $\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)^2\,;$	12) $\vec\nabla\left(\dfrac{\vec a\cdot\vec r}{r^3}\right)\,.$

1.11. Обчислити: $(\vec a\times\vec\nabla)\cdot\vec r$, $\big((\vec a\times\vec\nabla)\times\vec r\big)$, $\dfrac{1}{2}\big(\vec a(\vec\nabla\cdot\vec r)-\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r)\big)$.

1.12. Для наступних векторних полів $\vec A$ обчислити $\,\mathrm{div}\,\vec A$ та $\,\mathrm{rot}\,\vec A$:

1) $\vec r;$	2) $\vec r r^2\,;$	3) $\vec r r^n\,,\ n\neq 2\,;$
4) $\dfrac{\vec r}{r}\,;$	5) $\dfrac{\vec r}{r^3}\,;$	6) $\dfrac{\vec r}{r^n}\,;$
7) $[\vec a\times\vec r\,]\,;$	8) $\vec r(\vec a\cdot\vec r\,)\,;$	9) $\vec a(\vec b\cdot\vec r\,)\,;$
10) $(\vec a r^n)\,;$	11) $\big[\vec a\times[\vec r\times\vec b\,]\big]\,;$	12) $\big[\vec r\times[\vec a\times\vec r\,]\big]\,;$
13) $\dfrac{[\vec a\times\vec r\,]}{r^3}\,;$	14) $\vec a\ln r\,;$	15) $r[\vec a\times\vec r\,]\,.$

Рекомендується додатково також обчислити $\vec\nabla\,\mathrm{div}\,\vec A$, $\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec A$, $\triangle\vec A$, $(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A$, де $\vec B$ — деякий вектор.

1.13. Обчислити: 1) $\vec\nabla\varphi(r)\,;$ 2) $\,\mathrm{div}\,\vec A(r)\,;$ 3) $\,\mathrm{rot}\,\vec A(r)\,.$

1.14. Обчислити: 1) $\Delta\varphi(r)\,;$ 2) $\Delta\vec A(r)\,;$ 3) $\Delta\dfrac{(\vec a\cdot\vec r)}{r^n}\,.$

[1] Тут і в наступних задачах великі латинські літери позначають функції вказаного аргументу, малі — сталі величини; $r\equiv|\vec r|$.

1.15. Обчислити:

1) $\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 2) $\vec{\nabla} e^{ikr}$; 3) $\vec{\nabla}\left(\dfrac{e^{ikr}}{r}\right)$;

4) $\vec{\nabla}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}}\right)$; 5) $\mathrm{div}\,\left(\vec{a}e^{ikr}\right)$; 6) $\mathrm{rot}\,\left(\vec{a}e^{ikr}\right)$;

7) $\mathrm{div}\,\left(\vec{A}(r)e^{i\vec{k}\vec{r}}\right)$; 8) $\mathrm{div}\,\left(\dfrac{\vec{a}}{r}e^{ikr}\right)$; 9) $\mathrm{rot}\,\left(\dfrac{\vec{a}}{r}e^{ikr}\right)$;

10) $\Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 11) $\Delta\left(\dfrac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}\right)$; 12) Δe^{ikr}.

1.2 Інтегральні теореми

Теореми Гаусса та Стокса в певному відношенні узагальнюють відому властивість інтеграла для функції однієї змінної, яка виражається рівністю:

$$\int\limits_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(b) - f(a)\,, \tag{1.4}$$

іншими словами: інтеграл від повного диференціалу $df(x)$ на замкнутому інтервалі визначається тільки значеннями функції $f(x)$ на його границях.

Для векторних функцій векторного аргументу існує кілька комбінацій з диференціальним оператором $\vec{\nabla}$, які можна розглядати як узагальнення повної похідної у лівій частині (1.4). Відповідні форми співвідношення (1.4) мають назву інтегральних теорем.

У математичному аналізі доводяться теореми Гаусса та Стокса, які можна сформулювати наступним чином.

Теорема Гаусса. *В об'ємі V, обмеженому замкнутою поверхнею $S(V)$ задана неперервно диференційовна векторна функція $\vec{A}(\vec{r})$. Тоді виконується рівність*

$$\oint\limits_{S(V)} \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,dS = \int\limits_V \mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})\,dV \tag{1.5}$$

(позначення: $\vec{n}(\vec{r})$ — вектор нормалі до поверхні S в точці $\vec{r}$, вектор $\vec{n}\,dS = \overrightarrow{dS}$ — елемент площі поверхні). Рівність (1.5) означає, що інтеграл у правій частині визначається тільни через значення функції $\vec{A}(\vec{r})$ на поверхні $S(V)$. Зауважимо, що для функцій, у яких порушені умови неперервності, теорема Гаусса не виконується. Фізичний зміст рівності (1.5) визначається у контексті гідродинаміки та класичної електродинаміки, інтеграл у лівій частині описує потік векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ (поля швидкостей рідини, електричного поля і т. п.) через поверхню. У поля з нульовою дивергенцією відсутні джерела у об'ємі V.

Теорема Стокса. *Заданий замкнутий контур L, поверхня S, яка спирається на контур L (це єдина вимога по її вибору) і неперервно диференційовна векторна функція $\vec{A}(r)$. Тоді має місце співвідношення:*

$$\oint\limits_{L(S)} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{\tau}(\vec{r})\, dl = \int\limits_{S} \vec{n}(\vec{r}) \cdot \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})\, dS\,, \tag{1.6}$$

тут $\vec{\tau}(\vec{r})$ — одиничний направляючий вектор L в точці $\vec{r}$ (вектор дотичної), $\overrightarrow{dl} = \vec{\tau} dl$ — елемент довжини вздовж контура. З фізичної точки зору інтеграл у лівій частині (1.6) задає циркуляцію векторного поля $\vec{A}$ по замкнутому контуру L. У випадку $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ циркуляція зникає, фізичною ілюстрацією може служити той факт, що робота потенціальної сили $\vec{F}$ при переміщенні системи по замкнутій траєкторії (тобто циркуляція $\vec{F}$ по контуру) дорівнює нулю.

1.16. Довести наслідки з теореми Гаусса:

1) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} \varphi \vec{n}\, dS = \int\limits_{V} \vec{\nabla} \varphi\, dV\,;$ 2) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \varphi\, dS = \int\limits_{V} \Delta \varphi\, dV\,;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} [\vec{n} \times \vec{A}\,]\, dS = \int\limits_{V} \operatorname{rot} \vec{A}\, dV\,;$ 4) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}\, dS = \int\limits_{V} \Delta \vec{A}\, dV\,;$

5) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} n_i t_{ij}\, dS = \int\limits_{V} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^i}\, dV\,.$

Ці наслідки можна записати у вигляді правила

$$\oint\limits_{S(V)} \vec{n} \star (\ldots) dS = \int\limits_{V} \vec{\nabla} \star (\ldots) dV\,,$$

де спосіб множення "$\star$" вектора $\vec{n}$ на $(\ldots)$ та оператора $\vec{\nabla}$ на $(\ldots)$ — один і той же.

1.17. Довести наслідки з теореми Стокса:

1) $\displaystyle\oint\limits_{L(S)} \varphi \vec{\tau}\, dl = \int\limits_{S} [\vec{n} \times \vec{\nabla}\,]\, \varphi\, dS\,;$ 2) $\displaystyle\oint\limits_{L(S)} (\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla}) \varphi\, dl = 0\,;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{L(S)} [\vec{\tau} \times \vec{A}\,]\, dl = \int\limits_{S} \big[[\vec{n} \times \vec{\nabla}\,] \times \vec{A}\,\big]\, dS\,.$

Ці наслідки можна записати у вигляді правила

$$\oint\limits_{L(S)} \vec{\tau} \star (\ldots) dl = \int\limits_{S} [\vec{n} \times \vec{\nabla}\,] \star (\ldots) dS\,,$$

де спосіб множення "$\star$" вектора $\vec{\tau}$ на $(\ldots)$ та оператора $[\vec{n}\times\vec{\nabla}\,]$ на $(\ldots)$ — один і той же.

1.18. Поверхневий інтеграл $\oint_{S(V)} \Delta\varphi \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS$ перетворити в об'ємний.

1.19. Об'ємний інтеграл $\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi \cdot \operatorname{rot}\vec{A}\right) dV$ перетворити в поверхневий.

1.20. Обчислити поверхневі інтеграли:

1) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} \vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{n})\, dS\,;$ 2) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} \vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{r})\, dS\,;$

3) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} \vec{a}(\vec{n}\cdot\vec{r})\, dS\,;$ 4) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} \big[[\vec{a}\times\vec{n}]\times\vec{r}\,\big]\, dS\,;$

5) $\displaystyle\oint\limits_{S(V)} [\vec{n}\times\vec{b}\,]\cdot[\vec{a}\times\vec{r}\,]d\,S\,,$

де $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — сталі вектори, $\vec{n}$ — орт нормалі до поверхні.

1.21. Обчислити інтеграл $\oint_{L(S)} [\vec{r}\times\vec{\tau}\,]\, dl$, де $L(S)$ — замкнутий контур, що обмежує площу S у площині $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$.

1.22. Довести тотожності:

$$\oint\limits_{L(S)} \big[\vec{r}\times[\vec{\tau}\times\vec{a}\,]\big]\, dl = \frac{1}{2}\oint\limits_{L(S)} \big[[\vec{r}\times\vec{\tau}\,]\times\vec{a}\,\big]\, dl\,,$$

$$\oint\limits_{L(S)} (\vec{r}\cdot\vec{a}) \cdot \vec{\tau}\, dl = \oint\limits_{L(S)} \big[[\vec{r}\times\vec{a}\,]\times\vec{\tau}\,\big]\, dl\,.$$

1.23. Довести рівність $\int_V \vec{j}(\vec{r})\, dV = 0$ при умові, що $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ всередині області, яка обмежує об'єм V та $\vec{j}\cdot\vec{n} = 0$ на її границі $S(V)$.

1.24. Використовуючи теорему Остроградського довести, що

$$\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,dV' = -\int\limits_V \vec{r}\,'\big(\vec{j}\cdot\vec{r}\big)\,dV'\,,$$

якщо $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

1.25. Довести формули Гріна:

$$\int\limits_V (f \,\triangle\, g - g \,\triangle\, f)\,dV = \oint\limits_{S(V)} \vec{n}\cdot(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f)\,dS\,,$$

$$\int\limits_V (f \,\triangle\, g + \vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g)\,dV = \oint\limits_{S(V)} f(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})g\,dS\,.$$

1.26. Довести формулу:

$$\int\limits_V \Big(\vec{A}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\Big)\,dV =$$

$$= \oint\limits_{S(V)} \Big(\big[\vec{B}\times\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\big] - \big[\vec{A}\times\,\mathrm{rot}\,\vec{B}\,\big]\Big)\,d\vec{S}\,.$$

1.27. Використовуючи теорему Гауса-Остроградського перетворити інтеграли: а) $I = \int_V \vec{j}(\vec{r})\,dV$, розглянути випадок, коли $\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r}) = 0$, а на поверхні S має місце $\vec{j}\cdot\vec{n} = 0$; б) $I = \int_V \vec{M}(\vec{r})\,dV$.

1.28. Знайти дивергенцію вектора

$$\vec{A}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int\limits_V \frac{\operatorname{div}'\vec{A}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV\,.$$

1.3 Ортогональні системи координат

1.3.1 Криволінійні координати

Для опису положення точки у тривимірному евклідовому просторі потрібні три незалежні параметри (координати). У прямокутних декартових координатах $(x,\,y,\,z)$ для радіус-вектора $\vec{r}$ використовується розклад

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\,,$$

де одиничні вектори $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ та $\vec{e}_z$ — задають глобальний (однаковий для всіх точок простору) базис.

У багатьох задачах (як правило у задачах із симетрією) розв'язок отримується значно простіше, якщо замість декартових координат (x, y, z) перейти до узагальнених криволінійних інших координат (q_1, q_2, q_3), які є більш природніми для даної задачі.Наприклад, для задач з аксіальною симетрією такими є циліндричні координати, які автоматично її враховують.

Перетворення координат задається набором співвідношень

$$x = x(q_1, q_2, q_3)\,, \quad y = y(q_1, q_2, q_3)\,, \quad z = z(q_1, q_2, q_3)\,, \tag{1.7}$$

або

$$q_1 = q_1(x, y, z)\,, \quad q_2 = q_2(x, y, z)\,, \quad q_3 = q_3(x, y, z)\,, \tag{1.8}$$

(обернених до (1.7)). Заміна $(x, y, z) \to (q_1, q_2, q_3)$ має бути невиродженою, тобто

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(q_1, q_2, q_3)} \neq \left[\begin{array}{l} 0 \\ \infty \end{array} \right. ,$$

що забезпечує взаємну незалежність нових та старих координат. Радіус-вектор $\vec{r}$ точки з координатами (q_1, q_2, q_3) задається розкладом

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3)\vec{e}_x + y(q_1, q_2, q_3)\vec{e}_y + z(q_1, q_2, q_3)\vec{e}_z\,.$$

Координатними поверхнями у криволінійній системі координат називаються поверхні, які у декартових координатах задаються рівняннями $q_i(x, y, z) = \text{const}$, $i = \overline{1,3}$ (тобто на i-ій координатній поверхні значення q_i — фіксоване). Через кожну точку простору проходить три незалежні координатні поверхні, їх попарні перетини називаються координатними лініями. Очевидно, вздовж координатної лінії (з номером 3), утвореної перетинами поверхонь $q_1 = \text{const}$ та $q_2 = \text{const}$ змінюється тільки q_3 [2]*. Будемо позначати координатні поверхні вказанням змінніх координат q: на координатній поверхні (i, j) змінюються q_i та q_j.*

Для опису геометричних об'єктів (векторів та тензорів) у криволінійних координатах вводяться три вектори базису, які визначаються напрямками дотичних до координатних ліній у даній точці простору. На відміну від декартового, такий базис є локальним, тобто залежить від точки, в якій він будується.

Напрямки дотичних до координатних ліній у точці з криволінійними координатами (q_1, q_2, q_3) задаються похідними від $\vec{r}$ по q_i:

$$\frac{\partial \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i} = \frac{\partial x(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}\vec{e}_x + \frac{\partial y(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}\vec{e}_y + \frac{\partial z(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}\vec{e}_z$$

(оскільки координати q_i — незалежні, то отринані вектори є лінійно незалежними). Довжини цих векторів називаються параметрами Ламе:

$$H_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| \equiv \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \right]^{1/2} . \tag{1.9}$$

---

[2] у декартових координатах всі координатні поверхні $z = \text{const}$ — паралельні площині xy, всі координатні лінії $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ — паралельні координатній площині (xy). Те ж стосується інших випадків.

Базисні вектори криволінійної системи з одиничною довжиною можна записати як

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\,, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\,. \tag{1.10}$$

Тут $\vec{e}_i$ — базисний вектор, дотичний до i-ої координатної лінії. Вираз (1.10) встановлює також зв'язок між ортогональними базисами $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ та $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Найбільш широко застосовуються ортогональні криволінійні координати*, в яких вектори базису є попарно ортогональними:*

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}\,, \quad \left[\vec{e}_i \times \vec{e}_j\right] = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k\,,$$

Зауважимо, що в загальному випадку верхні індекси відрізняють від нижніх у записі компонент тензорів. Тільки в ортогональних системах координат верхні та нижні індекси — еквівалентні.

Вектор є інваріантним об'єктом (незалежним від вибору координат), тому в ортогональних криволінійних координатах, як і в декартових має місце розклад

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3\,, \quad A_i = \vec{A}\cdot\vec{e}_i\,, \quad i = \overline{1,3}\,. \tag{1.11}$$

Зв'язок між компонентами вектора $\vec{A}$ у декартовому та криволінійному базисах встановлюється шляхом порівняння (1.10) з $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$, очевидно

$$A_i = A_x(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_i) + A_y(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_i) + A_z(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_i)\,, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

Розглянемо приріст $\overrightarrow{dl}$ радіус-вектора $\vec{r}(q_i)$ при переході від точки з координатами (q_1, q_2, q_3) до точки $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$:

$$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}dq_i = H_1\vec{e}_1 dq_1 + H_2\vec{e}_2 dq_2 + H_3\vec{e}_3 dq_3 = \vec{e}_1 dl_1 + \vec{e}_2 dl_2 + \vec{e}_3 dl_3\,,$$

де dl_i позначають проекції $\overrightarrow{dl}$ на координатні лінії q_i, та задають відповідні елементи довжини вздовж координатних ліній q_i. Легко бачити, що

$$\overrightarrow{dl}_i = dl_i\vec{e}_i\,, \quad dl_i = H_i dq_i \quad (\textit{суми по } i \textit{ немає})\,. \tag{1.12}$$

Квадрат елемента довжини має вигляд:

$$dl^2 = \overrightarrow{dl}\cdot\overrightarrow{dl} = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2$$

(у декартових координатах $dl_x = dx$, $dl_y = dy$, $dl_z = dz$ і $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$).

Криволінійний паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{dl}_i$ та $\overrightarrow{dl}_j$ задає природній елемент площі на координатній поверхні (i, j), його значення визначається векторним добутком

$$\overrightarrow{dS}_{ij} = \left[(\vec{e}_i dl_i)\times(\vec{e}_j dl_j)\right] = H_i H_j dq_i dq_j \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k \quad (\textit{суми по } i \textit{ та } j \textit{ немає})\,. \tag{1.13}$$

Аналогічно, природній для координат q_i елемент об'єму є об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{dl_1}$, $\overrightarrow{dl_2}$, $\overrightarrow{dl_3}$:

$$dV = \overrightarrow{dl}_1\cdot\overrightarrow{dS}_{23} = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3\,. \tag{1.14}$$

У класичній електродинаміці найчастіше використовуються чотири ортогональні системи координат: декартова, циліндрична, сферична та еліпсоїдальна (а також кілька частинних випадків останньої). Найбільш загальною є еліпсоїдальна система, усі інші системи координат — її вироджені випадки (див.[6]).

Декартові координати

Означення: *геометричне*

Координатні поверхні:

площини $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$ *та* $z = \mathrm{const}$

Межі зміни координат:

$x \in]-\infty, +\infty[$, $y \in]-\infty, +\infty[$, $z \in]-\infty, +\infty[$

Параметри Ламе:

$$H_x = 1\,, \quad H_y = 1\,, \quad H_z = 1\,.$$

Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = dx^2 + dy^2 + dz^2\,.$$

Циліндричні координати

Означення:

циліндричними координатами називаються змінні r, φ, z, *які пов'язані з декартовими координатами як*

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,.$$

Вирази через декартові координати:

$$r^2 = x^2 + y^2\,, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}\,, \quad z = z\,.$$

Координатні поверхні:

1) коаксіальні циліндри $r = \mathrm{const}$ *з віссю* z, *або* $x^2 + y^2 = r^2$

2) вертикальні площини $\varphi = \mathrm{const}$, *що проходять через вісь* z, *або* $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$

3) площини $z = \mathrm{const}$

Межі зміни координат: $r \in [0, +\infty[$, $\varphi \in]0, 2\pi[$, $z \in]-\infty, +\infty[$

Граничні випадки: $r \to 0$ *— вісь* z

Параметри Ламе:

$$H_r = 1\,, \quad H_\varphi = r\,, \quad H_z = 1\,.$$

Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2\,.$$

Сферичні координати

Означення:

сферичними координатами називаються змінні r, θ, φ, *які пов'язані з декартовими координатами як*

$$x = r\cos\varphi\sin\theta\,, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta\,, \quad z = r\cos\theta\,.$$

Вирази через декартові координати:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,, \quad \mathrm{tg}^2\,\theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

Координатні поверхні:
1) концентричні сфери $r = \text{const}$ *з центром в* 0*, або* $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
2) конуси $\theta = \text{const}$*, або* $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta$
3) вертикальні площини $\varphi = \text{const}$*, що проходять через вісь* z*, або* $y = x \operatorname{tg} \varphi$
Межі зміни координат: $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in]0, \pi[$, $\varphi \in]0, 2\pi[$.
Граничні випадки:

- $r \to 0$ — *початок координат,*
- $\theta \to 0$ — *частина осі* z*, при* $z > 0$,
- $\theta \to \pi$ — *частина осі* z*, при* $z < 0$

Параметри Ламе:

$$H_r = 1\,, \quad H_\theta = r\,, \quad H_\varphi = r \sin\theta\,.$$

Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\,.$$

Еліпсоїдальні координати

Означення:
Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad a > b > c$$

є рівнянням еліпсоїда з півосями a*,* b *та* c*. Тоді рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1$$

задає три поверхні другого порядку (у кубічного рівняння три розв'язки відносно u*), що мають ті ж фокуси, що і вихідний еліпсоїд. Ці розв'язки* ξ*,* η*,* ζ *називаються еліпсоїдальними координати і лежать у межах:*

$$-c^2 \leqslant \xi\,, \quad -b^2 \leqslant \eta \leqslant -c^2\,, \quad -a^2 \leqslant \zeta \leqslant -b^2\,.$$

Вирази через декартові координати:

$$x = \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2}\,,$$
$$y = \pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2}\,,$$
$$z = \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2}\,.$$

Координатні поверхні:
1) конфокальні еліпсоїди $\xi = \text{const}$*, або*

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1\,, \quad \xi \in [-c^2, +\infty[\,,$$

2) конфокальні однопорожнинні гіперболоїди $\eta = \text{const}$*, або*

$$\frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2}{b^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1\,, \quad \eta \in [-b^2, -c^2]\,,$$

3) конфокальні двопорожнинні гіперболоїди $\zeta = \text{const}$*, або*

$$\frac{x^2}{a^2+\zeta} + \frac{y^2}{b^2+\zeta} + \frac{z^2}{c^2+\zeta} = 1\,, \quad \zeta \in [-a^2, -b^2]\,.$$

Через кожну точку простору проходить тільки одна поверхня кожного типу, тому координати ξ*,* η*,* ζ *однозначно визначають положення точки у просторі.*

Межі зміни координат: $\xi \in [-c^2, +\infty[$, $\eta \in [-b^2, -c^2]$, $\zeta \in [-a^2, -b^2]$
Граничні випадки:

- $\xi \to -c^2$ *— частина площини* yz *всередині еліпса з півосями* $\sqrt{a^2-c^2}$ *вздовж осі* z *та* $\sqrt{a^2-b^2}$ *вздовж осі* y*,*
- $\eta \to -c^2$ *— частина площини* yz *поза еліпсом з півосями* $\sqrt{a^2-c^2}$ *вздовж осі* z *та* $\sqrt{a^2-b^2}$ *вздовж осі* y*,*
- $\eta \to -b^2$ *— частина площини* xz *поза гіперболою з півосями* $\sqrt{b^2-c^2}$ *вздовж осі* z *та* $\sqrt{a^2-b^2}$ *вздовж осі* x*,*
- $\zeta \to -b^2$ *— частина площини* xz *всередині гіперболи з півосями* $\sqrt{b^2-c^2}$ *вздовж осі* z *та* $\sqrt{a^2-b^2}$ *вздовж осі* x*,*
- $\zeta \to -a^2$ *— площина* xy

Параметри Ламе:

$$H_\xi = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi}\,, \quad H_\eta = \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta}\,, \quad H_\zeta = \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta}\,,$$

де позначено

$$R_u = \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)} \quad \text{для} \quad u = \xi,\ \eta,\ \zeta\,.$$

Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = H_\xi^2 d\xi^2 + H_\eta^2 d\eta^2 + H_\zeta^2 d\zeta^2\,.$$

Стиснуті сфероїдальні координати, I

Вирази через декартові координати: При $a = b > c$ *еліпсоїдальна система координат вироджується і перетворюється у стиснуту сфероїдальну систему координат. При цьому координата* ζ *стає рівною сталій величині* $-a^2$ *и замінюється на іншу координату — полярний кут* φ *у площині* xy *(спосіб означення полягає у законі, за якам* $\zeta \to -a^2$*, коли* $b \to a$*:* $\cos\varphi = \sqrt{(a^2+\zeta)/a^2-b^2}$*). Рівняння, які визначають координати* ξ *та* η *мають вигляд*

$$\frac{r^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1\,, \quad \xi \in [-a^2, +\infty[\,,$$

$$\frac{r^2}{a^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1\,, \quad \eta \in [-c^2, -a^2[$$

тут позначено $r^2 = x^2+y^2$. *У декартових координатах ці поверхні описують відповідно еліпсоїди обертання та однопорожнинні гіперболоїди обертання з тими ж фокусами (знаки доданків у рівняннях "+, +" та "+, −" відповідно).* Вирази для декартових координат:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad r = \sqrt{\frac{(a^2+\xi)(a^2+\eta)}{a^2-c^2}} z = \pm\sqrt{\frac{(c^2+\xi)(c^2+\eta)}{c^2-a^2}}$$

Координатні поверхні:
1) $\xi =$ const *— еліпсоїди з півосями* $\sqrt{a^2+\xi}$, $\sqrt{a^2+\xi}$ *та* $\sqrt{c^2+\xi}$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1\,, \quad \xi \in [-a^2, +\infty[\,,$$

2) $\eta =$ const *— однопорожнинні гіперболоїди з півосями* $\sqrt{a^2+\eta}$, $\sqrt{-a^2-\eta}$ *та* $\sqrt{c^2+\xi}$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1\,, \quad \xi \in [-a^2, +\infty[\,,$$

3) вертикальні площини $\varphi =$ const, *що проходять через вісь* z, *або* $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$
Межі зміни координат: $\xi \in [-c^2, +\infty[$, $\eta \in [-a^2, c^2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$
Граничні випадки:

- $\xi \to -c^2$ *— частина площини* xy *всередині диску радіуса* $\sqrt{a^2-c^2}$ *з центром у початку кооринат,*
- $\eta \to -c^2$ *— пряма, яка співпадає з віссю* z*,*
- $\eta \to -a^2$ *— частина площини* xy *зовні диску радіуса* $\sqrt{a^2-c^2}$ *з центром у початку кооринат*

Параметри Ламе:

$$H_\xi = \sqrt{\frac{\xi-\eta}{R_\xi}}\,, \quad H_\eta = \sqrt{\frac{\xi-\eta}{R_\eta}}\,, \quad H_\varphi = r$$

де позначено $R_\xi = (\xi+a^2)(\xi+c^2)$, $R_\eta = (\eta+a^2)(-\eta-c^2)$.
Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = H_\xi^2 d\xi^2 + H_\eta^2 d\eta^2 + H_\varphi^2 d\varphi^2\,.$$

Витягнуті сфероїдальні координати, I

Вирази через декартові координати: *При* $a > b = c$ *еліпсоїдальна система координат вироджується і перетворюється у витягнуту сфероїдальну систему координат. При цьому координата* η *стає рівною сталій величині* $-b^2$ *и замінюється на іншу координату — полярний кут* φ *у площині* xy *(спосіб означення полягає у законі, за якам* $\eta \to -b^2$, *коли* $b \to c$: $\cos\varphi = \sqrt{(b^2+\eta)/b^2-c^2}$*). Рівняння, які визначають координати* ξ *та* ζ *мають вигляд*

$$\frac{r^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1\,, \quad \xi \in [-b^2, +\infty[\,,$$
$$\frac{r^2}{a^2+\zeta} + \frac{z^2}{c^2+\zeta} = 1\,, \quad \zeta \in [-b^2, -a^2[$$

тут позначено $r^2 = y^2 + z^2$. У декартових координатах ці поверхні описують відповідно еліпсоїди обертання та двопорожнинні гіперболоїди обертання з тими ж фокусами (знаки доданків у рівняннях "+, +" та "−, +" відповідно). Вирази для декартових координат:

$$y = r\cos\varphi\,, \quad z = r\sin\varphi\,, \quad x = \sqrt{\frac{(a^2+\xi)(a^2+\zeta)}{b^2-c^2}}r = \pm\sqrt{\frac{(c^2+\xi)(c^2+\zeta)}{b^2-c^2}}$$

Координатні поверхні:
1) $\xi = \mathrm{const}$ — еліпсоїди з півосями $\sqrt{a^2+\xi}$, $\sqrt{a^2+\xi}$ та $\sqrt{c^2+\xi}$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1\,, \quad \xi \in [-a^2, +\infty[\,,$$

2) $\zeta = \mathrm{const}$ — двопорожнинні гіперболоїди з півосями $\sqrt{a^2+\zeta}$, $\sqrt{^2+\zeta}$ та $\sqrt{c^2+\xi}$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1\,, \quad \xi \in [-a^2, +\infty[\,,$$

3) вертикальні площини $\varphi = \mathrm{const}$, що проходять через вісь z, або $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$
Межі зміни координат: $\xi \in [-c^2, +\infty[$, $\eta \in [-a^2, c^2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$
Граничні випадки:

- *$\xi \to -c^2$ — відрізок довжини $2\sqrt{a^2-c^2}$, який паралельний до осі x з центром у початку координат,*
- *$\eta \to -c^2$ — частина прямої, яка співпадає з віссю x, $x \notin]-\sqrt{a^2-c^2}, \sqrt{a^2-c^2}[$,*
- *$\eta \to -a^2$ — площина yz*

Параметри Ламе:

$$H_\xi = \sqrt{\frac{\xi-\zeta}{R_\xi}}\,, \quad H_\eta = \sqrt{\frac{\xi-\zeta}{R_\zeta}}\,, \quad H_\varphi = r$$

де позначено $R_\xi = (\xi+a^2)(\xi+c^2)$, $R_\zeta = (\zeta+a^2)(\zeta+c^2)$. Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = H_\xi^2 d\xi^2 + H_\eta^2 d\eta^2 + H_\varphi^2 d\varphi^2\,.$$

Стиснуті сфероїдальні координати, II

Вирази через декартові координати: *Інший спосіб введення сфероїдальних координат — через безрозмірні змінні, які задають відхилення від базової поверхні. Рівняння*

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,, \quad a > b$$

задає стиснутий еліпсоїд обертання (сфероїд). У площині (r, z), де $r^2 = x^2 + y^2$:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

це еліпс з півосями a, b та координатами фокусів $(\pm c, 0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Інша форма запису:

$$\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - 1} = c^2 \,, \quad \xi = \frac{a}{c} \geqslant 1 \quad \text{(безрозмірний параметр)}$$

Рівняння

$$\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - 1} = c^2 \,, \quad \xi =\geqslant 1 \,, \quad \frac{r^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2 \,, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1$$

задають стиснутий еліпсоїд та однопорожнинний гіпербоїд обертання з тими ж фокусами у площині rz, що і у вихідного еліпсоїда.

Змінні ξ, η та полярний кут φ називаються стиснутими сфероїдальними координатами. Зв'язок з координатами ξ_1 та η_1, введеними першим способом:

$$\xi_1 + a^2 = \xi^2 c^2 \,, \quad \eta_1 + a^2 = \eta^2 c^2 \,.$$

Вирази для декартових координат:

$$x = c\xi\eta\cos\varphi \,, \quad y = c\xi\eta\sin\varphi \,, \quad z = \pm c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \,.$$

Координатні поверхні:
1) $\xi =$ const — еліпсоїди з півосями $c\xi$, $c\xi$ та $c\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$\frac{r^2}{c^2\xi^2} + \frac{z^2}{c^2(\xi^2 - 1)} = 1 \,, \quad \xi \geqslant 1$$

2) $\eta =$ const — однопорожнинні гіперболоїди з півосями $c\eta$, $c\eta$ та $c\sqrt{1 - \eta^2}$

$$\frac{r^2}{eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2 \,, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1$$

3) вертикальні площини $\varphi =$ const, що проходять через вісь z, або $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$
Межі зміни координат: $\xi \in [1, +\infty[$, $\eta \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$
Граничні випадки:

- *$\xi \to 1$ — частина площини xy всередині диску радіуса $\sqrt{a^2 - c^2}$ з центром у початку коорінат,*
- *$\eta \to -1$ — пряма, яка співпадає з віссю z,*
- *$\eta \to 1$ — частина площини xy зовні диску радіуса $\sqrt{a^2 - c^2}$ з центром у початку коорінат*

Параметри Ламе:

$$H_\xi = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \,, \quad H_\eta = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \,, \quad H_\varphi = c\xi\eta \,.$$

Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = H_\xi^2 d\xi^2 + H_\eta^2 d\eta^2 + H_\varphi^2 d\varphi^2 \,.$$

Витягнуті сфероїдальні координати, II

Вирази через декартові координати: Вводяться аналогічно стиснутим сфероїдальним координатам. Для $a < b$ рівняння

$$\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - 1} = c^2\,, \quad \xi \geqslant 1\,, \quad \frac{r^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2\,, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1$$

задають витягнутий еліпсоїд та двопороднинний гіпербоїд обертання з тими ж фокусами у площині rz, що і у вихідного еліпсоїда, у даному випадку $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.
Вирази для декартових координат:

$$x = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\cos\varphi\,, \quad y = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\sin\varphi\,, \quad z = \pm c\xi\eta\,.$$

Координатні поверхні:
1) $\xi = \mathrm{const}$ — еліпсоїди з півосями $c\xi$, $c\xi$ та $c\sqrt{\xi^2 - 1}$

$$\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - 1} = c^2\,, \quad \xi = \geqslant 1$$

2) $\eta = \mathrm{const}$ — двопорожнинні гіперболоїди з півосями $c\eta$, $c\eta$ та $c\sqrt{1 - \eta^2}$

$$\frac{r^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2\,, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1$$

3) вертикальні площини $\varphi = \mathrm{const}$, що проходять через вісь z, або $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$
Межі зміни координат: $\xi \in [1, +\infty[$, $\eta \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$
Граничні випадки:

- *$\xi \to 1$ — відрізок довжини $2\sqrt{b^2 - a^2}$, який паралельний до осі x з центром у початку координат,*
- *$\eta \to 1$ — частина прямої, яка співпадає з віссю x, $x \notin]-\sqrt{b^2 - a^2}, \sqrt{b^2 - a^2}[$,*
- *$\eta \to -1$ — площина yz*

Параметри Ламе:

$$H_\xi = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}\,, \quad H_\eta = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}\,, \quad H_\varphi = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\,.$$

Елемент довжини:

$$d\vec{r}^{\,2} = H_\xi^2 d\xi^2 + H_\eta^2 d\eta^2 + H_\varphi^2 d\varphi^2\,.$$

1.29. Виразити вектори базису $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ та $\vec{e}_z$ циліндричної системи координат через вектори базису декартової $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ та $\vec{e}_z$, обчислити параметри Ламе. Знайти зв'язок між компонентами вектора у циліндричних та декартових координатах. Знайти рівняння координатних поверхонь та ліній.

1.30. Виразити вектори базису $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ та $\vec{e}_\varphi$ сферичної системи координат через вектори базису декартової $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ та $\vec{e}_z$, обчислити параметри Ламе. Знайти зв'язок між компонентами вектора у сферичних та декартових координатах. Знайти рівняння координатних поверхонь та ліній.

1.31. Довести ортогональність еліпсоїдальних координат шляхом обчислення компонент метричного тензора

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}(q)}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}(q)}{\partial q_j}\,.$$

1.32. Довести ортогональність сфероїдальних координат II шляхом обчислення компонент метричного тензора.

1.33. Виразити вектори базису $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ та $\vec{e}_\zeta$ еліпсоїдальної системи координат через вектори базису декартової e_x, e_y та e_z, обчислити параметри Ламе. Знайти зв'язок між компонентами вектора у еліпсоїдальних та декартових координатах. Знайти рівняння координатних поверхонь та ліній.

1.34. Показати, що стиснуті сфероїдальні координати II ξ, η можна записати як

$$\xi = \frac{r_+ + r_-}{2}\,, \quad \eta = \frac{r_+ - r_-}{2}\,,$$

де $r_\pm$ — відстані від точки на еліпсі у площині rz до фокусів $(\pm c, 0)$.

1.35. Перевірити висновки про граничні випадки для еліпсоїдальних та сфероїдальніх координат обох типів.

1.3.2 Диференційні операції у криволінійних координатах

Основні властивості диференціальних операцій у криволінійних координатах суттєво не відрізняються від розглянутих у попередньому розділі операцій у декартових координатах. Насамперед, зберігаються всі інваріантні співвідношення (незалежні від вибору базису), зокрема правила диференціювання добутків. По цій причині основні підходи до розв'язування задач — ті ж, що і у випадку векторних полів, заданих у декартовому базисі.

Єдина відмінність криволінійного базису від декартового полягає в тому, що криволінійний базис — локальний (залежить від точки простору) і використовувати формули, які справедливі для декартових координат, не можна. Базисні вектори $\vec{e}_i$ — залежать від координат q_i і разом з координатами векторів підлягають диференціюванню. Наприклад для дивергенції векторного поля $\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3$, використовуючи *векторну тотожність, можна записати:*

$$\operatorname{div} \sum_{i=1}^{3} A_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{div}\left(A_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(A_i \operatorname{div} \vec{e}_i + \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla} A_i\right)$$

(у декартових координатах перший доданок відсутній).

Основні диференціальні операції в криволінійних координатах мають вигляд:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\vec{e}_1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3},$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1 A_2 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 A_3)}{\partial q_3}\right),$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{e}_1}{H_2 H_3} & \dfrac{\vec{e}_2}{H_1 H_3} & \dfrac{\vec{e}_3}{H_1 H_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ A_1 H_1 & A_2 H_2 & A_3 H_3 \end{pmatrix}.$$

Ці формули можна вивести, використовуючи векторні тотожності.

Зручність використання криволінійної системи координат (порівняно з декартовою) у деяких задачах викликана особливістю заданого векторного поля. Наприклад, центрально-симетричне поле у координатах (x, y, z) має вигляд $\vec{A}(x,y,z) = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)\cdot f(r)/r$, *(три компоненти), тоді як у сферичних координатах* $(r,\ \theta,\ \varphi)$: $\vec{A}(r,\theta,\varphi) = \vec{e}_r f(r)$ *(одна компонента). Кількість доданків у виразах для ротора та дивергенції такого поля визначається числом відмінних від нуля його компонент.*

1.36. Прямим обчисленням знайти $\vec{\nabla} q_i$ у криволінійній системі координат:

$$\vec{\nabla} q_i = \frac{1}{H_i}\vec{e}_i.$$

Довести формулу для $\vec{\nabla} f(\vec{r})$.

1.37. Прямим обчисленням знайти $\operatorname{rot} \vec{e}_i$ у криволінійній системі координат:

$$\operatorname{rot} \vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\vec{e}_2}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{\vec{e}_3}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) \equiv \frac{1}{H_1}\left[\vec{\nabla} H_1 \times \vec{e}_1\right].$$

Довести формулу для $\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$.

1.38. Прямим обчисленням знайти $\operatorname{div} \vec{e}_i$ у криволінійній системі координат:

$$\operatorname{div} \vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right).$$

Довести формулу для $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r})$.

1.39. Прямим обчисленням знайти $\Delta\vec{e}_i$ в циліндричній системі координат.

1.40. Прямим обчисленням знайти $\Delta\vec{e}_i$ у сферичній системі координат.

1.41. Довести формули

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q_j} = \frac{\vec{e}_j}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\,, \qquad \frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\vec{e}_3 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\vec{e}_2\,.$$

1.42. Записати циклічні компоненти вектора $\vec{\nabla}$ в циліндричних та сферичних координатах.

1.43. Знайти вирази для $\vec{\nabla}f(\vec{r}),\ \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}),\ \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$ у циліндричних координатах.

1.44. Знайти вирази для $\vec{\nabla}f(\vec{r}),\ \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}),\ \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$ у сферичних координатах.

1.45. Знайти вираз для $\Delta f(\vec{r})$ у циліндричних та сферичних координатах.

1.46. Знайти вираз для $\Delta\vec{A}(\vec{r})$ у циліндричних та сферичних координатах.

1.47.

Записати вектор $(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ в циліндричних координатах.

1.48. Записати вектор $(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ у сферичних координатах.

1.49. Знайти вираз для $\Delta f(\vec{r})$ у еліпсоїдальних координатах.

1.50. Знайти вирази для $\Delta f(\vec{r})$ у сфероїдальних координатах обох типів.

1.4 Дельта-функція Дірака

Означення дельта-функції Дірака $\delta(x)$:

$$1)\ \delta(x) = 0\,, \quad x \neq 0\,, \qquad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\,dx = f(0)\,, \tag{1.15}$$

де $f(x)$ — довільна неперервна функція.

Дельта-функція не функцією у класичному розумінні. Строго кажучи, $\delta(x)$ — функціонал (лінійний оператор), дія якого на аргумент виражається означенням (1.15), тобто

$$\hat{\delta}(f) = (\delta, f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\,dx = f(0)\,.$$

Існує кілька елементарних функцій, границями яких є $\delta(x)$, але такі граничні переходи обчислюються як слабкі (спочитку потрібно знайти інтеграл, а потім границю, а не навпаки — див. задачу 1.52).

Функція $\delta(x)$ по суті виникає у контексті обернення операції визначеного інтегрування, яка по своїй природі породжує математичні об'єкти, які не належать множині, на якій була введена пряма операція. Новий об'єкт $\delta(x)$, означений таким чином, належить класу так званих узагальнених функцій або розподілів. Такі функції мають точний зміст тільки при дії на свій аргумент, тобто у даному випадку — під інтегралом типу (1.15). Зауважимо, що рівність (1.15) часто записується як $\delta(x)f(x) = f(0)\delta(x)$, інтеграл мається на увазі.

У фізиці δ-функція широко використовується для математично коректного просторового опису точкових об'єктів на зразок точкової маси та точкового заряду. Дійсно, визначити густину розводілу маси с точці розташуванн об'єкту не можна, експериментально вимірюється лише її середнє значення в деякій області. Наприклад, матеріальній точці з масою m, розміщеній у початку координат, можна співставити густину $\rho(x) = m\delta(x)$, тоді середнє значення густини співпадає з масою частинки: $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = m$. Аналогічно дається означення для просторової густини точкового заряду e.

З означення (1.15) випливають властивості δ-функції (заміна змінної у інтегралі):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x-a)\,dx = f(a)\,. \tag{1.16}$$

Інши прості властивості приведені у задачах нижче. Зауважимо, що проміжок інтегрування $]\infty, \vec{+}\infty[$ можна замінити на довільний інтервал $[a,b]$, всередині якого аргумент δ-функції перетворюється в нуль. У випадку, коли такою точкою буде одна з меж інтеграла, потрібно ввести коефіцієнт $1/2$ у правій частині (для узгодження з властивістю парності δ-функції):

$$\int\limits_{-\infty}^{a} \delta(x)f(x-a)\,dx = \frac{1}{2}\,f(a)\,.$$

Узагальнені функції можна диференціювати довільну кількість разів. Точний зміст похідної визначається дією на аргумент:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x)\,dx = \delta(x)f(x)\big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)'\,dx = -f'(0)\,,$$

або $\delta'(x)f(x) = -f(0)\delta(x)$. Аналогічно виводиться формула

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(0)\,, \quad \textit{або} \quad \delta^{(n)}(x)f(x) = (-1)^{(n)} f^{(n)}(0)\delta(x)\,. \tag{1.17}$$

Означення (1.15) дельта-функції не єдине. З властивостей (1.15) можна вивести інші, еквівалентні властивості дельта-функції, які можна також взяти в якості її *означення. Дельта-функція може розглядатись як похідна функції Хевісайда $\eta(x)$:*

$$\delta(x) = \eta'(x)\,, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

(у більш строгому означенні вважається $\eta(0) = 1/2$).

І, нарешті, δ-функцію можна означити як функцію з одиничним фур'є-образом:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \tag{1.19}$$

(у звичайному розумінні цей інтеграл, очевидно, є розбіжним і має сенс тільки за своїм головним значенням).

Тривимірну δ-функцію можна означити як добуток трьох одновимірних δ-функцій:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}\,') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\,. \tag{1.20}$$

Всі властивості одновимірної δ-функції елементарно переносяться на тривимірний випадок. Зауважимо, що $\delta(\vec{r})\,dx\,dy\,dz$ є безрозмірною величиною, тому фізична розмірність $\delta(\vec{r})$ — обернений об'єм.

Зауважимо, що для опису обмеженого розподілу заряду крім δ-функції на функції Хевісайда використовується функція характеру множини

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in [a,b] \\ 0\,, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

функція $\chi_{[a,b]}(x)$ легко виражається через лінійну комбінацію функцій Хевісайда.

1.51. Довести, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x,\varepsilon) = 0$ виконується для наступних функцій

$$f(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon}\,, \qquad f(x,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{4\pi\varepsilon}}\,,$$

$$f(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,, \qquad f(x,\varepsilon) = -\frac{e^{x/\varepsilon}}{\varepsilon(e^{x/\varepsilon}+1)^2}$$

1.52. Довести формулу $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\,\delta(x)$.

1.53. Довести формулу (1.17).

1.54. Довести формулу (1.18).

1.55. Довести формулу (1.19).

1.56. Довести формули:

$$\delta(x) = \delta(-x)\,, \quad \delta'(-x) = -\delta'(x)\,, \quad x\delta(x) = 0\,, \quad x\delta'(x) = -\delta(x)\,.$$

1.57. Довести формулу $\delta(f(x)) = \sum\limits_k \frac{1}{|f'(x_k)|}\delta(x-x_k)$, де x_k — прості нулі функції $f(x)$.

1.58. Довести формулу $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k)$.

1.59. Перетворити вираз $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,\delta^{(m)}(x)\,dx$.

1.60. Нехай функція $f(x)$ має розриви першого роду в точках x_k, $k=\overline{1,n}$. Виразити її похідну через δ-функцію.

1.61. Записати δ-функції $\delta(\vec{r})$ та $\delta(\vec{r}-\vec{a})$ у циліндричних координатах.

1.62. Записати δ-функції $\delta(\vec{r})$ та $\delta(\vec{r}-\vec{a})$ у сферичних координатах.

1.63. Довести, що $\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$.

1.64. За допомогою δ-функції, функції Хевісайда та функції характеру записати об'ємну густину розподілу заряду (вибираючи максимально зручні координати):
1) заряд e рівномірно розподілений по поверхні сфери радіуса R;
2) заряд e рівномірно розподілений по кільцю радіуса R;
3) заряд e рівномірно розподілений по диску радіуса R;
4) циліндрична поверхня радіуса R та висоти h має поверхневий заряд σ;
5) площина xy має поверхневий заряд σ;
6) заряд e рівномірно розподілений по відрізку $-a \leqslant z \leqslant a$;
7) пряма вздовж осі z рівномірно заряджена з лінійною густиною $\varkappa$;
8) заряд e рівномірно розподілений по поверхні ныпівсфери радіуса R.

1.65. За допомогою δ-функції, функції Хевісайда та функції характеру записати об'ємну густину розподілу струму (вибираючи максимально зручні координати):
1) постійний поверхневий струм $\vec{i}$ тече по нескінченій циліндричній поверхні радіуса R;
2) постійний поверхневий струм $\vec{i}$ тече по плошині xy;
3) постійний лінійний струм I тече по кільцю радиуса R;
4) рівномірно заряджена по поверхні сфера радиуса R обертається нав-

коло свого діаметра з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (густина заряду дорівнює σ);
5) рівномірно заряджений по поверхні конус з кутом α обертається навколо осі симетрії з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (густина заряду дорівнює σ).

1.66. Функцію $\delta(1-x)$ розкласти у ряд по поліномам Лежандра.

1.67. Знайти $\Delta(1/r)$ за допомогою перетворення Фур'є.

1.5 Правила Сохоцького-Коші

У практичних застосуваннях часто виникає необхідність обчислення інтегралу типу

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\,dx\,, \quad f(x) \in C[x_1, x_2]\,, \quad a \in [x_1, x_2]\,. \tag{1.21}$$

З точки зору теорії функцій комплексної змінної підінтегральна функція має полюс $x = a$ першого порядку на дійсній осі, тому використати безпосередньо теорему Коші, доповникши інтервал $[x_1, x_2]$ до замкнутого контура, не можна (полюс повинен повністю лежати всередині контуру інтегрування).

Для перетворення інтегралу використовується два загальних метода, які зводяться до формулування правила обходу полюса (рис. 1):

- *розширити область інтегрування на комплексну область та обійти особливість колом малого радіуса r зверху або знизу (в залежності від властивостей функції), далі спрямувати $r \to 0$;*

- *доповнити облать до замкнутого контура зверху або знизу і змістити полюс на малу величину ε всередину контура, далі спрямувати $\varepsilon \to 0$.*

У першому випадку інтеграл обчислюється за допомогою правил головного значення по Коші, а в другому — з використанням теореми Коші теорії лишків.

Розглянемо перший метод, нехай C_r позначає півколо, а L — повний контур інтегрування. Для визначеності ввадатимемо, що особливість обходиться зверху. Очевидно,

$$\int\limits_L \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int\limits_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \int\limits_{L-C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,,$$

перший доданок описує інтеграл по півколу, а другий — по всій іншій частині контура, тобто по області $x \in [x_1, a-r[\cup]a+r, x_2]$ на дійсній осі. При $r \to 0$ інтеграл по півколу легко обчислюється:

$$\int\limits_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \left| z = a + re^{i\varphi} \right| = i\int\limits_{\pi}^{0} f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi \to -i\pi f(a)$$

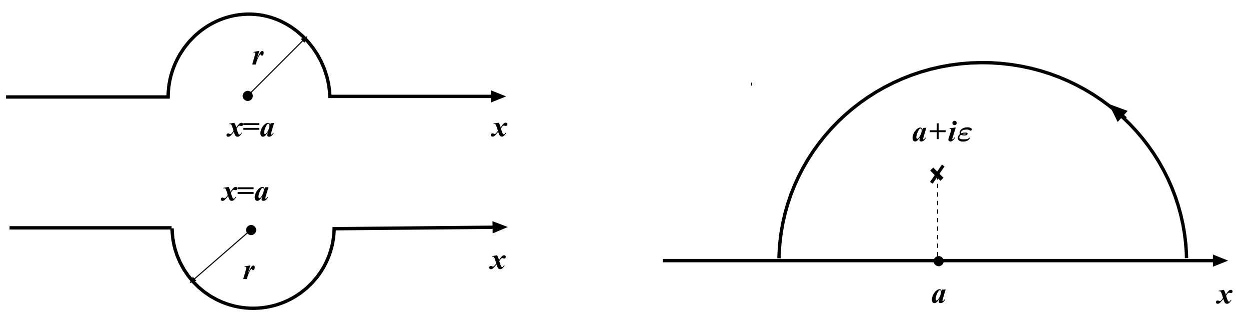

Рис. 1: Правила обходу полюса $x = a$ на дійсній осі

(половина лишку в точці a), тому

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\, dx = -i\pi f(a) + \text{v. p.} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\, dx\,, \tag{1.22}$$

де другий доданок описує правило інтегрування функції з особливостями по Коші — виключення особливої точки разом з симетричним околом:

$$\text{v. p.} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\int\limits_{x_1}^{a-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-a}\, dx + \int\limits_{a+\varepsilon}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}\, dx \right] .$$

Використовуючи означення δ-функції, цю формулу можна символічно записати як

$$\frac{1}{x-a} = -i\pi\delta(x-a) + \text{v. p.} \frac{1}{x-a} \quad \textit{для обходу у напрямку} \circlearrowleft \textit{зверху}\,. \tag{1.23}$$

При обході особливості знизу отримується аналогічний вираз із заміною знаку при δ-функції:

$$\frac{1}{x-a} = +i\pi\delta(x-a) + \text{v. p.} \frac{1}{x-a} \quad \textit{для обходу у напрямку} \circlearrowleft \textit{знизу}\,. \tag{1.24}$$

Підкреслимо, що обидві тотожності носять символічний характер і їх потрібно розуміти так, що інтегрування функцій у обох частинах рівності, домножених на довільну неперервну функцію дає однакові результати.

При другому способі перетворення інтегралу полюс зміщується на малу уявну величину $i\varepsilon$, тобто $a \to a \pm i\varepsilon$. Тоді правила обчислення інтегралу (1.23, 1.24) матимуть вигляд

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{x-(a\pm i\varepsilon)} = \pm i\pi\delta(x-a) + \text{v. p.} \frac{1}{x-a}\,. \tag{1.25}$$

Зауважимо, що обчислюючи дійсну частину (1.25), можна отримати представлення у вигляді границі для головного значення:

$$\text{v. p.} \frac{1}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2} \tag{1.26}$$

що аналогічне представленню δ-функції

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon\to0} \delta_\varepsilon(x-a) = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+(x-a)^2}\,.$$

1.6 Аналіз Фур'є

1.6.1 Ряд Фур'є

Функцію $f(x)$ (з "достатньо хорошими властивостями") визначену на відрізку $[-l,l]$ можна подати у вигляді ряду

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right)\,, \tag{1.27}$$

де

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, \quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,. \qquad (1.28)$$

Цей ряд називається рядом Фур'є для функції $f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-l,l]$ має скінченне число екстремумів і є неперервною, за вийнятком, можливо скінченного числа точок розриву 1-ого роду, то ряд Фур'є в кожній точці відрізку $[-l,l]$ збігається до функції $f(x)$. Неважко бачити, що сума ряду Фур'є функції $f(x)$ є періодичною функцією з періодом $2l$.

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0,l]$, то для розкладання її в ряд Фур'є можна скористатися одним з наступних способів, що призведе до різних представлень $f(x)$.

Перший спосіб полягає у перетворенні координат таким чином, щоб початок координат було зміщено до середини відрізку $[0,l]$. Таким чином, можна використовувати формули (1.27) і (1.28) замінивши l на $l/2$.

У другому способі функцію $f(x)$ достатньо довизначити на відрізку $[-l,0]$ довільним чином, а тоді розкласти вряд Фур'є, вважаючи її заданою на відрізку $[-l,l]$. Найбільш доцільно функцію довизначити так, щоб її значення в точках відрізку $[-l,0]$ знаходилися з умови $f(x)=f(-x)$ або $f(x)=-f(-x)$. Таким чином

- ***Парне продовження функції**,*

  $$F(x) = \begin{cases} f(-x)\,, & \text{де} \quad x\in[-l,0]\,, \\ f(x)\,, & \text{де} \quad x\in[0,l]\,. \end{cases}$$

  Ряд Фур'є містить містить тільки вільний член і косинуси, а саме

  $$F(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}\,,$$

  де

  $$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \equiv \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

- ***Непарне продовження функції**,*

  $$F(x) = \begin{cases} -f(-x)\,, & \text{де} \quad x\in[-l,0]\,, \\ f(x)\,, & \text{де} \quad x\in[0,l]\,. \end{cases}$$

  Ряд Фур'є містить містить тільки синуси

  $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\,,$$

  де

  $$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \equiv \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

В обох випадках ряд для $F(x)$ збігається з рядом для $f(x)$ для всіх значень x на відрізку $[0, l]$.

Також існують інші методи продовження довизначення функції $f(x)$ на відрізку $[-l, 0]$. Найпростіший — покласти $F(x) = 0$ для значень x на відрізку $[-l, 0]$.

Зазначимо, що множина функцій $\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ та $\cos\dfrac{\pi n x}{l}$ (де $n = 1, 2, 3, \ldots$) утворює ортогональну систему на відрізку $[-l, l]$, а саме

$$\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{\pi m x}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{\pi m x}{l} x \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = (1 + \delta_{n0}) l \delta_{mn}\,,$$
$$\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{\pi m x}{l}\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = 0\,. \tag{1.29}$$

Часто комплексна форма розкладу в ряд Фур'є є більш зручнішою, ніж тригонометрична. Система функцій $\varphi_n(x) = e^{i\pi n x/l}$ для цілих значень n утворюють ортогональну систему на відрізку $[-l, l]$ зі скалярним добутком

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int\limits_{-l}^{l} \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\,dx \equiv \int\limits_{-l}^{l} e^{i\pi m x/l} e^{-i\pi n x/l}\,dx = 2l\,\delta_{mn}\,. \tag{1.30}$$

Отримане розкладання має наступний вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i\pi n x/l}\,, \quad \text{де} \quad c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{i\pi n x/l}\,dx\,. \tag{1.31}$$

Зазначимо, що

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_n(x') \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n x/l} e^{-i\pi n x'/l} = 2l\,\delta(x - x')\,. \tag{1.32}$$

Це співвідношення є аналогом умови ортогональності, у якій неперервна змінна x і дискретна величина n міняються місцями.

1.68. Знайти співвідношення між еквівалентними розкладами, вираженими формулами (1.27) і (1.31).

Знайдіть розклад Фур'є для наступних функцій:

1.69. $f(x) = \operatorname{sign} x$ на сегменті $[-\pi, \pi]$.

1.70. $f(x) = \eta(x)$ на сегменті $[-\pi, \pi]$.

1.71. $f(x) = e^x$ на сегменті $[-\pi, \pi]$.

1.72. а) $f(x) = x$, б) $f(x) = |x|$ на сегменті $[-\pi, \pi]$.

1.73. а) $f(x) = \operatorname{sh} x$, б) $f(x) = \operatorname{ch} x$, в) $f(x) = x\cos x$, г) $f(x) = x\sin x$ на сегменті $[-\pi, \pi]$.

1.74. Знайти розклад в ряд Фур'є для $f(x) = \sin x$ на сегменті $[0, \pi/2]$, а) розкласти на синусоїдальні функції, б) розкласти на косиноїдальні функції, в) розкласти на синусоїдальні та косиноїдальні функції.

1.75. Знайти розклад в ряд Фур'є для $f(x) = x$ на сегменті $[0, \pi]$, а) розкласти на синусоїдальні функції, б) розкласти на косиноїдальні функції, в) розкласти на синусоїдальні та косиноїдальні функції

1.76. Знайти розклад в ряд Фур'є для функцій (тут $|q| < 1$)

$$f_1(x) = \frac{1 - q\cos x}{1 - 2q\cos x + q^2}\,, \quad f_2(x) = \frac{q\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}\,.$$

1.77. Знайти розклад в ряд Фур'є для функції (тут $|q| < 1$)

$$f(x) = \frac{1 - q^2}{1 - 2q\cos x + q^2}\,.$$

1.78. Знайти розклад Фур'є для функції $f(x) = \cos^{2m} x$.

1.79. Знайти комплексний розклад в ряд Фур'є для функції $f(x) = e^{ax}$ на сегменті $[-1/a, 1/a]$.

1.80. Знайти комплексний ряд Фур'є для функцій на сегменті $[-\pi, \pi]$:

$$\text{а) } \operatorname{sh} x\,, \quad \text{б) } \operatorname{ch} x\,, \quad \text{в) } x\sin x\,, \quad \text{г) } x\cos x\,.$$

1.6.2 Інтеграл Фур'є

Інтегральне перетворення Фур'є можна розглядати як природне узагальнення розкладу функції в ряд Фур'є, яке виконано на скінченному відрізку, на іипадок нескінченного інтервалу. Якщо відрізок $[-l, l]$ розширити на всю числову вісь за умови $l \to +\infty$, то дискретний набір ортогональних функцій $\varphi_n(x) = e^{i\pi nx/l}$ перетворюється на неперервний (де $n = 1, 2, 3, \ldots$). У цьому випадку всі суми мають бути замінені інтегралами, а символи Кронекера — δ-функціями.

Проведемо цей граничний перехід, Перепишемо ряд (1.31) у наступному вигляді:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-i\pi nx/l} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2lc_n) e^{ik_n x} \delta k_n\,,$$

де $k_n = \dfrac{\pi n}{l}$, $\delta k_n = k_{n+1} - k_n = \dfrac{\pi}{l}$.

Далі перепишемо формулу для коефіцієнтів c_n таким чином:

$$2lc_n = \int\limits_{-l}^{l} e^{ik_n x} f(x)\, dx = \hat{f}(k_n).$$

Отже представлення для функції $f(x)$ набуває вигляду інтегральної суми Дарбу

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k_n)e^{ik_nx}\,\delta k_n\,,\quad \text{де}\quad \hat{f}(k_n)=\int\limits_{-l}^{l}e^{ik_nx}f(x)\,dx\,.$$

У граничному випадку $l\to\infty$ величина $\delta k_n\to 0$. Шляхом заміни $k_n\to k$ і $\hat{f}(k_n)\to\hat{f}(k)$, сума по n заміниться інтегралом по змінній k:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\dots)\delta k_n\to\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\dots)\,dk\,.$$

Таким чином, розклад для функції $f(x)$ приймає наступний вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}\,dk\,,\quad \text{де}\quad \hat{f}(k)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ikx}\,dx\,. \tag{1.33}$$

Отримані співвідношення називаються перетворенням Фур'є.

Тепер умова ортогональності має вигляд:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}e^{-ik'x}\,dx=2\pi\delta(k-k')\,, \tag{1.34}$$

тоді як

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}e^{-ikx'}\,dk=2\pi\delta(x-x')\,. \tag{1.35}$$

Просторове перетворення Фур'є визначається як кратний інтеграл

$$f(\vec{r})=\frac{1}{2\pi}\iiint\hat{f}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{k}\,,\quad \text{де}\quad \hat{f}(\vec{k})=\iiint f(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{r}\,. \tag{1.36}$$

Тут обидва інтеграли беруться по всьому простору, $d\vec{r}$ і $d\vec{k}$ позначають елементи об'єму відповідних просторів.

1.81. Нехай дано образ Фур'є $\hat{f}(k)$ для функції $f(x)$. Знайти образи для наступних функцій:

1)$x^nf(x)$; 2)$f^{(n)}(x)$; 3)$f(ax)$; 4)$f(-x)$; 5)$f(x+x_o)$; 6)$e^{ik_ox}f(x)$.

1.82. Знайти спрощений вигляд перетворення Фур'є у випадку, коли 1) $f(-x)=f(x)$; 2) $f(-x)=-f(x)$.

1.83. Знайти образи Фур'є $\hat{f}(k)$ для заданих функцій $f(x)$:

1) $f(x)=e^{-\alpha^2x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\alpha^2x^2}$;

4) $f(x)=\dfrac{\cos k_ox}{1+\alpha^2x^2}$; 5) $f(x)=\begin{cases}e^{-\alpha x}\,, & x>0,\\ 0\,, & x\leqslant 0\end{cases}$; 6) $f(x)=\begin{cases}1\,, & |x|\leqslant a,\\ 0\,, & |x|>a\,.\end{cases}$

1.84. Знайти образи Фур'є $\hat{f}(k)$ для заданих функцій $f(x)$:

$$1)\ f(x) = \operatorname{sign} x\,;\quad 2)\ f(x) = \eta(x)\,;\quad 3)\ f(x) = \sin x\,;$$
$$4)\ f(x) = \cos x\,;\quad 5)\ f(x) = e^x\,;\quad 6)\ f(x) = \frac{1}{x}\,;$$
$$7)\ f(x) = x^n\,;\quad 8)\ f(x) = \delta(x)\,;\quad 9)\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n\,.$$

1.85. Для функцій $\varphi(\vec{r})$ та $\vec{A}(\vec{r})$ задані образи Фур'є $\hat{\varphi}(\vec{k})$ та $\vec{A}(\vec{k})$. Знайти образи для наступних функцій: 1) $\vec{\nabla}\varphi$; 2) $\Delta\varphi$; 3) $\operatorname{div}\vec{A}$; 4) $\operatorname{rot}\vec{A}$.

1.86. Знайти образи Фур'є $\hat{f}(\vec{k})$ для заданих функцій $f(\vec{r})$.

$$1)\ f(\vec{r}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}\,;\quad 2)\ f(\vec{r}) = e^{-\alpha r^2}\,;\quad 3)\ f(\vec{r}) = r^n e^{-\alpha r^2}\,;\quad 4)\ f(\vec{r}) = r^n\,.$$

1.7 Поліноми Лежандра та сферичні гармоніки

1.7.1 Поліноми Лежандра

Функцією Лежандра першого роду називається розв'язок рівняння

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right) + n(n+1)y(x) = 0\,, \tag{1.37}$$

обмежений при $x = 1$. Позначення: $y(x) = P_n(x)$. Для цілих значень n функція $P_n(x)$ є поліномом порядку n, загальний вираз якого дається формулою Родрігеса:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,. \tag{1.38}$$

Кілька перших поліномів Лежандра:

$$P_o(x) = 1\,,\quad P_1(x) = x\,,\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,,\quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,,\ldots$$

З формули Родрігеса легко отримати частинні значення поліномів Лежандра:

$$P_n(1) = 1\,,\quad P_n(-1) = (-1)^n\,,\quad P_{2k+1}(0) = 0\,,\quad P_{2k}(0) = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,. \tag{1.39}$$

Функції $P_n(x)$ утворюють повну систему ортогональних функцій на інтервалі [-1, 1]. Інтеграл нормування має вигляд:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}\,. \tag{1.40}$$

Розклад довільної функції $f(x)$ в ряд по поліномам Лежандра на інтервалі [-1, 1] дається виразом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\,, \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx\,. \tag{1.41}$$

У класичній електродинаміці поліноми Лежандра виникають у зв'язку з розкладом функції $\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ (потенціал одиничного точкового заряду, розташованого у точці $\vec{r}\,'$) у ряд Тейлора по степеням частки $\dfrac{r_<}{r_>}$, де $r_>$ та $r_>$ — більша та менша з величин r та r'. Має місце формула

$$F(x,t) = \frac{1}{\left[1 - 2xt + t^2\right]^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n\,. \tag{1.42}$$

Функція $F(x,t)$ називається твірною функцією. У контексті класичної електродинаміки цей розклад має вигляд:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\left[1 - 2\dfrac{r_<}{r_>}\cos\alpha + \left(\dfrac{r_<}{r_>}\right)^2\right]^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\alpha)\,, \quad \alpha = \angle(\vec{r}, \vec{r}\,')$$

Поліномі Лежандра задовольняють двом основним рекурентним співвідношенням, які випливають з властивостей твірної функції:

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2xP_n(x)\,, \quad (n+1)P_n(x) - (2n+1)xP_n(x) + xP_{n-1}(x) = 0\,. \tag{1.43}$$

Інші рекурентні співвідношення, які випливають з (1.43):

$$P'_{n+1}(x) - xP_n(x) = (n+1)P_n(x)\,, \quad xP'_n(x) - P_{n-1}(x) = nP_n(x)\,,$$
$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)\,.$$

Другий лінійно незалежний розв'язок рівняння (1.37) називається функцією Лежандра другого роду і позначається $Q_n(x)$. У загальному випадку

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln\frac{x+1}{x-1} + f_{n-1}(x)\,,$$

де $f_{n-1}(x)$ — поліном порядку $n-1$ по x. Явні вирази для функцій $Q_n(x)$ при $n = 0, 1, 2$:

$$Q_o(x) = \frac{1}{2} \ln\frac{x+1}{x-1}\,, \quad Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln\frac{x+1}{x-1} - 1\,, \quad Q_2(x) = \frac{1}{4}\big(3x^2 - 1\big) \ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x\,. \tag{1.44}$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Лежандра має вигляд:

$$y(x) = A_n P_n(x) + B_n Q_n(x)\,.$$

При великих значеннях аргументу x:

$$P_n(x) \simeq \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\, x^n\,, \quad Q_n(x) \simeq \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!\, x^{n+1}}\,. \tag{1.45}$$

1.87. Довести, що вираз (1.38) задовольняє рівнянню (1.37).

1.88. Довести формули (1.39) двома способами: 1) безпосередньо, використовуючи формулу Родрігеса; 2) використовуючи властивості твірної функції для поліномів Лежандра.

1.89. Використовуючи формулу Родрігеса, довести (1.40).

1.90. Розкласти в ряд по поліномам Лежандра функцію $f(x) = \operatorname{sign} x$.

1.91. Розкласти в ряд по поліномам Лежандра функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1\,, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1.92. Розкласти в ряд по поліномам Лежандра функцію $f(x) = x^n$.

1.93. Довести рекурентні формули (1.43) двома способами: 1) безпосередньо, використовуючи формулу Родрігеса; 2) використовуючи властивості твірної функції для поліномів Лежандра.

1.94. Знайти інтеграли:

$$1)\int\limits_0^1 P_n(x)\,dx\,, \qquad 2)\int\limits_0^1 xP_n(x)\,dx\,,$$

$$3)\int\limits_{-1}^1 xP_m(x)P_n(x)\,dx\,.$$

1.95. Довести розклад

$$\frac{1-t^2}{\left[1-2xt+t^2\right]^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)t^n\,.$$

1.7.2 Приєднані функції Лежандра

Рівняння для приєднаних функцій Лежандра має вигляд:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y(x) = 0\,, \tag{1.46}$$

Обмежені розв'язки при $x = 1$ позначаються $P_n^m(x)$ і виражаються через поліноми Лежандра

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n\,, \quad m = \overline{-n,n}\,\text{(ціле число)} \tag{1.47}$$

З формули Родрігеса випливає, що

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \tag{1.48}$$

In particular

$$P_n^n = (2n-1)!!\left(1-x^2\right)^{n/2}.$$

Для кожного значення m функції $P_n^m(x)$ є ортогональними на інтервалі [-1, 1]:

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x)\, dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}\,. \tag{1.49}$$

У задачах на розділення змінних з конічними границями використовуютьcя функції P_l^m та Q_l^m з нецілими значеннями l. Рівняння Ледандра залишаєтьcя тим же. Інтеграл ортогональності має вигляд:

$$\int_{x_0}^{1} \theta_l^m(x) \theta_{l'}^m(x)\, dx = \frac{x_o^2 - 1}{2l+1} \left[\frac{\partial \theta_l^m(x)}{\partial x} \frac{\partial \theta_l^m(x)}{\partial l} \right]_{x=x_o}, \tag{1.50}$$

де x_o — корінь рівняння $\theta_l^m(x) = 0$, а θ_l^m — довільна лінійна комбінація функцій P_l^m та Q_l^m.

1.96. Знайти явні вирази для приєднаних функцій Лежандра для $n = 0, 1, 2, 3$.

1.97. Довести, що вираз (1.47) задовольняє рівнянню (1.46).

1.98. Довести формулу (1.48).

1.99. Довести формулу (1.49).

1.100. Довести формулу (1.51).

Вказівка. Використати рівняння Лежандра та визначник Вронського для функцій P_l^m та Q_l^m.

1.101. Знайти $P_n^1(0)$.

1.7.3 Сферичні гармоніки

Сферичні гармоніки виражаютьcя через приєднані поліноми Лежандра як [3]

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}\,, \tag{1.51}$$

[3] У даному випадку приєднані функції Лежандра зручно записувати у вигляді

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{dP_l(\cos\theta)}{d(cos\theta)}$$

де θ та φ — кути сферичної системи координат, і задовольняють рівнянню

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_{lm}(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi)\,, \tag{1.52}$$

де

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

є кутовою частиною оператора Лапласа.

При $m = 0$ сферична гармоніка виражається через поліном Лежандра:

$$Y_{l0}(\theta,\varphi) = i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,P_l(\cos\theta)\,.$$

Сферичні гармоніки з $l = 0, 1, 2$ мають вигляд:

$$\begin{array}{ll} Y_{00} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} & Y_{10} = i\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\,\cos\theta \\ Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\,\sin\theta e^{\pm i\varphi} & Y_{20} = -\sqrt{\dfrac{5}{4\pi}}\,\dfrac{3\cos^2\theta - 1}{2} \\ Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\,\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi} & Y_{2,\pm2} = -\sqrt{\dfrac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi} \end{array} \tag{1.53}$$

Найпростіші властивості:

$$\begin{gathered} Y_{lm}(0,0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}\,, \quad Y_{l,-|m|}(\theta,\varphi) = (-1)^{l-m}Y^*_{l,|m|}(\theta,\varphi)\,, \\ Y_{l,m}(\theta,\varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\pi-\theta,\pi+\varphi)\,. \end{gathered} \tag{1.54}$$

Сферичні гармоніки утворюють повну систему ортогональних функцій на множині $\theta \in [0,\pi]$ та $\varphi \in [0,2\pi]$ (поверхня сфери):

$$\begin{gathered} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin\theta\, Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \int d\Omega\, Y^*_{lm}(\Omega)Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\,, \\ \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta',\varphi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\varphi-\varphi')\,, \end{gathered} \tag{1.55}$$

де позначено $\Omega = (\theta,\varphi)$ (пара кутів) та $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Довільна функція $f(\theta,\varphi)$ може бути розкладена у ряд по сферичним гармонікам:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,, \quad A_{lm} = \int Y_{lm}(\Omega)f(\Omega)\,d\Omega \tag{1.56}$$

Інтеграли по куту φ мають вигляд:

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta,\varphi)\,d\varphi = 2\pi\delta_{m0}Y_{l0}\,, \quad \int_0^{2\pi} Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)\,d\varphi = 2\pi\delta_{mm'}Y^*_{l0}Y_{l'0}\,.$$

У класичній електродинаміці сферичні гармоніки виникають у зв'язку з розкладом функції $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ *(потенціал одиничного точкового заряду, розташованого у точці* $\vec{r}\,'$*) у ряд Тейлора по степеням частки* $\dfrac{r_<}{r_>}$*, де* $r_>$ *та* $r_<$ *— більша та менша з величин* r *та* r'*. Має місце формула (так звана теорема додавання)*

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)\,. \tag{1.57}$$

1.102. Довести формули (1.53).
1.103. Довести формули (1.54).

1.8 Функції Бесселя

1.8.1 Означення функцій Бесселя

Функції Бесселя (циліндричні функції) є розв'язками рівняння Бесселя

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0\,. \tag{1.58}$$

Розв'язок, обмежений при $x\to 0$ *називається циліндричною функцією порядку* ν *першого роду (або функцією Бесселя). Запис розв'язку у вигляді степеревого ряду:*

$$J_\nu(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\,. \tag{1.59}$$

Деякі найпростіші випадки вибору параметра ν*:*

$$\begin{gathered}J_o(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\dots\,,\\ J_1(x)=\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^4}{2\cdot 4^2\cdot 6}-\frac{x^6}{2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8}+\dots\right)\,.\end{gathered} \tag{1.60}$$

Для напівцілого порядку:

$$J_{1/2}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x\,,\quad J_{-1/2}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x\,. \tag{1.61}$$

Взагалі, функції Бесселя напівцілого порядку $J_{n+1/2}(x)$ *виражаються через елементарні.*

Другим, лінійно незалежним розв'язком рівняння (1.58) буде функція, яка необмежена в нулі:

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}\,. \tag{1.62}$$

У випадку, коли $\nu = n$ — ціле число, функції $J_n(x)$ та $J_{-n}(x)$ стають лінійно залежними

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)\,, \tag{1.63}$$

тому часто в якості другого лінійно незалежного розв'язку рівняння (1.58) вводять функцію Неймана (або Функцію Бесселя другого роду), яка є лінійною комбінацією функцій $J_\nu(x)$ та $J_{-\nu}(x)$:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \tag{1.64}$$

Функції $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$ є лінійно незалежними для довільних значень ν.

Функціями Бесселя третього роду, або функціями Ханкеля, називаються наступні лінійні комбінації функцій $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)\,, \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)\,. \tag{1.65}$$

Як і пара функцій $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$, пара функцій Ханкеля утворює фундаментільну систему розв'язків рівняння Бесселя (1.58). Повний розв'язок (1.58) можна подати у двох еквівалентних формах:

$$y(x) = a_1 J_\nu(x) + a_2 N_\nu(x)\,, \quad \textit{або} \quad y(x) = b_1 H_\nu^{(1)}(x) + b_2 H_\nu^{(2)}(x)\,.$$

Всі циліндричні функції задовольняють рекурентним співвідношенням

$$Z_{\nu-1} + Z_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x)\,, \quad Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1} = 2\frac{dZ_\nu(x)}{dx}\,, \tag{1.66}$$

де $Z_\nu(x)$ — довільна з циліндричних функцій (J_ν, N_ν, $H_\nu^{(1,2)}$) порядку ν. Note that $J_o(x) = -J_1(x)$.

Асимптотичні вирази для функцій Бесселя при малих та великих значеннях аргументу:

при $x \ll 1$:

$$J_\nu(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\,, \tag{1.67}$$

$$N_\nu(x) \simeq \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\ln\dfrac{x}{2} + 0.5772\ldots\right) & \textit{при}\,\nu = 0 \\ -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu & \textit{при}\,\nu \neq 0 \end{cases} \tag{1.68}$$

при $x \gg 1$:

$$J_\nu(x) \simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\,, \tag{1.69}$$

$$N_\nu(x) \simeq \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.70}$$

(перехід від однієї асимптотичної формули до іншої відбувається для значень $x \simeq \nu$).

Коренем функції Бесселя порядку ν називається розв'язок рівняння $J_\nu(x) = 0$, позначення $x = x_\nu$. Основні властивості коренів $J_\nu(x)$:

1. *Корені функцій $J_\nu(x)$ при $\nu > -1$ — тільки дійсні і прості (за виключенням, можливо, точки 0).*

2. *Функція $J_\nu(x)$ (довільне ν) не може мати чисто уявних коренів.*

3. *Функція $J_\nu(x)$ має нескінчене число коренів, які позначаютьcя $x_{\nu,i}$ (i — номер кореня).*

4. *Має місце нерівність:*

$$\ldots x_{\nu,i} < x_{\nu+1,i} < x_{\nu,i+1} < x_{\nu+1,i+1} < x_{\nu,i+2} < x_{\nu+1,i+2} < \ldots$$

Корені похідної функції Бесселя $J'_\nu(x)$ позначаютьcя $x'_{\nu,i}$, а для коренів функцій Неймана $N_\nu(x)$ та $N'_\nu(x)$ використовуються позначення $y_{\nu,i}$ та $y'_{\nu,i}$ відповідно. Властивості цих коренів — аналогічні.

1.104. Довести формулу (1.58), підставляючи ряд $y(x) = x^\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ у рівняння Бесселя і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x.

1.105. Довести формули (1.61).

1.106. Довести, що функції $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$ є лінійно незалежними для довільних значень ν (для нецілих значень ν це очевидно, для цілих — обчислити вронскіан $J_\nu(x)$ та $N_\nu(x)$).

1.107. Довести рекурентні формули (1.66) для функцій Бесселя за допомогою представлення у вигляді ряду.

1.108. Довести рекурентні формули

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x)\,, \quad J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x)\,.$$

1.109. Довести наступні рекурентні співвідношення:

$$\frac{d^n}{(xdx)^n}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^n \frac{J_{\nu+n}(x)}{x^{\nu+n}}\,, \quad \frac{d^n}{dx^n}\big[x^\nu J_\nu(x)\big] = x^\nu J_{\nu-n}(x)\,.$$

1.110. Довести формули

$$\int x^n J_n(x)\,dx = x^n J_{n-1}(x)\,, \quad \int x^{-n} J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n} J_n(x)\,,$$
$$\int J_1(x)\,dx = -J_o(x)\,.$$

1.111. Довести формули

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{x})\right] = x^{(\nu-1)/2}J_{\nu-1}(2\sqrt{x})\,,$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu/2}J_\nu(2\sqrt{x})\right] = -x^{-(\nu-1)/2}J_{\nu+1}(2\sqrt{x})\,.$$

1.112. За допомогою рекурентних формул знайти невизначені інтеграли:

$$\int x^\nu J_{\nu-1}\,dx\,, \qquad \int x^{-\nu}J_{\nu+1}\,dx\,.$$

1.113. Знайти невизначені інтеграли:

$$\int\limits_0^\infty J_1(x)\,dx\,, \quad \int\limits_0^\infty x^{-1}J_2(x)\,dx\,, \quad \int\limits_0^\infty x^{-n}J_n(x)\,dx\,.$$

1.114. Довести рівність:

$$\int\limits_0^\infty J_{n+1}(x)\,dx = \int\limits_0^\infty J_n(x)\,dx + 2J_{n+1}(0)\,.$$

1.115. Довести рівності (за допомогою рівняння для функції $J_0(x)$):

$$\int\limits_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)\,, \quad \int\limits_0^x x^3J_0(x)\,dx = 2x^2J_0(x) + (x^3-4x)J_1(x)\,.$$

1.116. За допомогою рекурентних формул та (1.61) знайти вирази для $J_{3/2}(x)$ та $J_{5/2}(x)$.

1.117. Знайти асимптотичні вирази для функцій Бесселя.

1.118. Знайти асимптотичні вирази для функцій Ханкеля.

1.119. Знайти Вронськіан для функцій Бесселя: $W[J_\nu, J_{-\nu}] = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x)$ (for $\nu \neq n$) та $W[J_\nu, N_\nu] = J_\nu(x)N'_\nu(x) - J'_\nu(x)N_\nu(x)$.

1.8.2 Ортогональність функцій Бесселя

У функцій Бесселя є властивість ортогональності, аналогічно поліномам Лежандра. За допомогою рівняння Бесселя для функцій $J_\nu(k_1x)$ та $J_\nu(k_2x)$ можна показати, що

$$\int\limits_a^b xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)\,dx = \frac{1}{k_1^2-k_2^2}\left[xJ'_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x) - xJ_\nu(k_1x)J'_\nu(k_2x)\right]_a^b\,, \qquad (1.71)$$

Якщо $J_\nu(k_1x)$ та $J_\nu(k_2x)$, або $J'_\nu(k_1x)$ та $J'_\nu(k_2x)$ перетворюються в нуль при $x = a, b$, то інтеграл (1.71) дорівнює нулю для $k_1 \neq k_2$ (можлива також комбінована умова). У випадку $k_1 = k_2 = k$ інтеграл обчислюється окремо. Використовуючи рівняння Бесселя можна отримати:

$$\int\limits_a^b xJ_\nu^2(kx)\,dx = \frac{x^2}{2}J'_\nu(kx)^2\Big|_a^b + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\nu^2}{k^2}\right)J_\nu(kx)^2\Big|_a^b . \tag{1.72}$$

Якщо $J_\nu(kx)$ перетворюється в нуль при $x = a, b$, то за допомогою рекурентної формули для цього випадку $J'_\nu(kx) = -J_{\nu+1}(kx)$, отримаємо

$$\int\limits_a^b xJ_\nu^2(kx)\,dx = \frac{x^2}{2}\big[J_{\nu+1}(kx)\big]^2\Big|_a^b , \quad \text{при} \quad J_\nu(ka) = J_\nu(kb) = 0 . \tag{1.73}$$

Як правило ці формули застосовуються для інтервалу $[0, a]$. Тоді комбінації у правих частинах зникають автоматично на межі $x = 0$, а для $x = a$ можна покласти $k = x_\nu/a$, де x_ν — корінь рівняння $J_\nu(x) = 0$. Тоді інтеграл ортогональності можна записати як

$$\int\limits_0^a xJ_\nu(k_{\nu,i}x)J_\nu(k_{\nu,j}x)\,dx = \frac{a^2}{2}\,\delta_{ij}\big[J_{\nu+1}(k_{\nu,i}a)\big]^2 , \tag{1.74}$$

де для скорочення позначено $k_{\nu,i} = x_{\nu,i}/a$ та $k_{\nu,j} = x_{\nu,j}/a$, $x_{\nu,i}$, $x_{\nu,j}$ — i-й та j-й корені рівняння $J_\nu(x) = 0$.

Умова ортогональності (1.74) використовується для розкладу функцій в ряд по функціям Бесселя J_ν на інтервалі $[0, a]$. За допомогою (1.74) легко показати, що

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(k_{\nu,i}x) , \quad a_i = \frac{\displaystyle\int\limits_0^a xf(x)J_\nu(k_{\nu,i}x)\,dx}{\dfrac{a^2}{2}\big[J_{\nu+1}(k_{\nu,i}a)\big]^2} , \quad k_{\nu,i} = \frac{x_{\nu,i}}{a} \tag{1.75}$$

(ряд Фур'є-Бесселя). Умова повноти базису $J_\nu(kx)$ на інтервалі $[0, a]$ виражається формулою

$$\frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(k_{\nu,n}x)J_\nu(k_{\nu,n}x')}{\big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2} = \frac{1}{x}\,\delta(x - x') . \tag{1.76}$$

Коли $a \to \infty$, розклад Фур'є-Бесселя переходить у інтеграл Фур'є-Бесселя (аналогічно звичайному інтегралу Фур'є, див. розділ 1.6):

$$f(x) = \int\limits_0^\infty k\hat{f}(k)J_\nu(kx)\,dk , \quad \hat{f}(k) = \int\limits_0^\infty xf(x)J_\nu(kx)\,dx . \tag{1.77}$$

Умова повноти на інтервалі $[0, \infty]$:

$$\int\limits_0^\infty xJ_\nu(kx)J_\nu(k'x)\,dx = \frac{1}{k}\delta(k - k') . \tag{1.78}$$

Якщо потрібно побудувати розклад функції по функкціям Бесселя на більш загальному інтервалі $[a,b]$, то в якості базису можна використовувати більш загальні функції вигляду

$$\varphi_\nu(x) = J_\nu(kx)N_\nu(ka) - N_\nu(kx)J_\nu(ka)\,,$$

параметр k вибирають так, що $\varphi_\nu(b) = 0$.

У загальному випадку для лінійної комбінації $R_n(x)$ функцій $J_n(x)$ та $N_n(x)$ інтеграл ортогональності має вигляд:

$$\int\limits_0^a rR_n(k_ir)R_n(k_jr)\,dr = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\left[r^2\left(\frac{dR_n(x)}{dx}\right)^2_{x=k_ir} + (x^2-n^2)R_n^2(kx)\right]_0^a . \qquad (1.79)$$

де $R_n(k_{i,j}) = 0$.

1.120. Довести формулу (1.71).

1.121. Довести формулу (1.72) за допомогою рівняння Бесселя.

1.122. Довести формулу (1.72), розкриваючи невизначеність у виразі (1.71) при $k_2 \to k_1$.

1.123. Довести (припустивши обернене), що корені функцій $J_\nu(x)$ при $\nu > -1$ — тільки дійсні.

1.124. Довести формулу (1.75).

1.125. Довести формулу (1.76).

1.126. Довести формулу (1.77).

1.127. Довести формулу (1.78).

1.128. Розкласти у ряд Фур'є-Бесселя по $J_\nu(x)$ функцію $f(x) = x^\nu$, при $x \in]0,1[$.

1.129. Довести формулу (1.79).

1.130. Модифікувати формулу (1.79) на випадок інтервалу $[a,b]$.

1.8.3 Інтегральні представлення для функцій Бесселя та твірна функція

Використовуючи розклад функції $J_\nu(x)$ у ряд Тейлора та властивості Γ-функції, можна отримати представлення у вигляді інтегралу:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi\,, \qquad (1.80)$$

або, після заміни $t = \sin\varphi$:

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2}e^{itx}\,dt\,. \qquad (1.81)$$

З інтегрального представлення випливає оцінка

$$|J_\nu(x)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left|\frac{x}{2}\right|^\nu .$$

Твірною функцією для $J_n(x)$ є функція

$$e^{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x) . \tag{1.82}$$

Для $t = e^{i\varphi}$ ряд перетворюється у розклад

$$e^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} J_n(x) . \tag{1.83}$$

З виразу (1.83), використовуючи ортогональність базису $e^{in\varphi}$ можна отримати інтеграл Бессел

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi)-n\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_{o}^{\pi} \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi . \tag{1.84}$$

1.131. Довести формулу (1.80).

1.132. Довести формулу (1.82), розкладаючи експоненту у ряд Лорана.

1.133. Довести формулу (1.83).

1.134. Довести рекурентні співвідношення за допомогою твірної функції.

1.135. Довести формуду додавання

$$J_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} J_k(x) J_{n-k}(y)$$

за допомогою твірної функції.

1.136. Довести формулу (1.84).

1.137. Довести формулу (1.77) для інтегралу Бесселя, використовуючи інтеграл Фур'є для функції $g(x,y) = f(r)e^{in\varphi}$ в полярних координатах та інтеграл Бесселя (1.84).

1.138. Отримати інтегральне представлення:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\, dt .$$

1.139. Довести (використовуючи розклади) настпуні формули:

$$\int\limits_0^{\pi/2} J_0(x\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\sin x}{x}\,, \qquad \int\limits_0^{\pi/2} J_1(x\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{1-\cos x}{x}\,.$$

1.140. Довести формулу Зоммерфельда:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-kz} J_o(kr)\,dk = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\,.$$

1.141. Довести формулу:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-ikz} J_o(kr)\,dk = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{z^2-r^2}}\,, & |z|>|r|\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{r^2-z^2}}\,, & |z|<|r|\,. \end{cases}$$

1.142. Довести формули:

$$\int\limits_0^{\infty} J_o(ax)\cos bx\,dx = \begin{cases} 1/\sqrt{a^2-b^2}\,, & a>b\,, \\ 0\,, & a<b\,, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{\infty} J_o(ax)\sin bx\,dx = \begin{cases} 0\,, & a>b\,, \\ 1/\sqrt{b^2-a^2}\,, & a<b\,. \end{cases}$$

1.143. Довести формулу:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-kz} J_n(kr)\,dk = \frac{r^n}{\sqrt{z^2+r^2}\big(\sqrt{z^2+r^2}+z\big)^n}\,.$$

1.144. Довести формулу:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x\cos\theta} J_0(x\sin\theta)\,x^n\,dx = \Gamma(n+1)P_n(\cos\theta)$$

1.145. Довести, що

$$\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}e^{-ax}J_\nu(bx)\,dx = \frac{2a(2b)^\nu\Gamma\left(\nu+\dfrac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\left(a^2+b^2\right)^{\nu+\frac{3}{2}}}\,, \quad \nu > -1\,.$$

1.146. Довести, що

$$\int\limits_0^\infty x^{\nu+1}e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)\,dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)\,.$$

1.8.4 Модифіковані функції Бесселя

У багатьох задачах математичної фізики та електродиміміки (у методі розділення змінних) виникає рівняння:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y(x) - (1+\frac{\nu^2}{x^2})y(x) = 0\,. \tag{1.85}$$

Це рівняння можна отримати з рівняння Бесселя заміною x на ix. Очевидно, частинним розв'язком (1.85) буде функція $J_\nu(ix)$. Для розв'язку рівняння (1.85) прийняте позначення:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{i^\nu}J_\nu(ix)\,. \tag{1.86}$$

При такому виборі константи функція $I_\nu(x)$ може бути подана у вигляді ряду:

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\,. \tag{1.87}$$

У випадку, коли ν не є цілим числом, то другим лінійно незалежним розв'язком рівняння (1.85) буде функція $I_{-\nu}(x)$. Якщо ж $\nu = n$ є цілим числом, то функції $I_n(x)$ та $I_{-n}(x)$ — лінійно залежні:

$$I_{-n}(x) = I_n(x)\,. \tag{1.88}$$

У загальному випадку для довільного значення ν другий лінійно незалежний розв'язок рівняння (1.85) називається функціїм Макдональда і має вигляд:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}-I_\nu}{\sin\pi\nu} \tag{1.89}$$

(очевидно при $\nu = n$ у правій частині буде невизначеність, яка розкривається за допомогою правила Лопіталя).

В результаті, загальний розв'язок рівняння (1.85) можна подати у вигляді

$$y(x) = c_1I_\nu(x) + c_2K_\nu(x)\,.$$

Асимптотичні вирази для модифікованих функцій Бесселя при малих та великих значеннях аргументу:

при $x \ll 1$**:**

$$I_\nu(x) \simeq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu , \tag{1.90}$$

$$K_\nu(x) \simeq \begin{cases} -\left(\ln\frac{x}{2} + 0.5772\ldots\right) & \textit{при}\, \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \textit{при}\, \nu \neq 0 \end{cases} \tag{1.91}$$

при $x \gg 1$**:**

$$I_\nu(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] , \tag{1.92}$$

$$K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] . \tag{1.93}$$

1.147. Довести рекурентні формули для модифікованих функцій Бесселя:

$$\begin{gathered} I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) , \\ I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x) , \\ K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) , \\ K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x) . \end{gathered}$$

1.148. Довести вираз для функції Макдональда:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi(\nu+1)/2} H_\nu^{(1)}(ix) .$$

1.149. Довести формули:

$$I'_o(x) = I_1(x) , \quad K'_o(x) = -K_1(x) .$$

1.150. Знайти Вронскіан для модифікованих функцій Бесселя, $W[K_\nu, I_\nu] = K_\nu(x) I'_\nu(x) - K'_\nu(x) I_\nu(x)$.

1.8.5 Сферичні функції Бесселя

При розв'язку задач у сферичних координатах часто виникають сферичні функції Бесселя та Ханкеля, які мають вигляд:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) , \quad n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x) , \quad h_n^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}^{(1,2)}(x) \tag{1.94}$$

(n — ціле число). Асимптотичні вирази для сферичних функцій Бесселя при малих та великих значеннях аргументу:

при $x \ll 1$**:**

$$j_n(x) \simeq \frac{x^n}{(2n+1)!!}\,, \quad h_n^{(1,2)}(x) \simeq \mp \frac{x^{-n-1}}{(2n-1)!!}\,, \tag{1.95}$$

при $x \gg 1$**:**

$$j_n(x) \simeq \frac{1}{x}\cos\left[x - \frac{\pi(n+1)}{2}\right]\,, \quad h_n^{(1,2)}(x) \simeq \frac{1}{x}\exp\left(\pm i\left[x - \frac{\pi(n+1)}{2}\right]\right)\,. \tag{1.96}$$

1.151. Записати вирази для j_n при $n = 0, 1, 2$.

1.9 Еліптичні інтеграли

Еліптичним інтегралом назівається інтеграл вигляду

$$\int R\big(x, \sqrt{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}\big)\, dx\,, \tag{1.97}$$

де $R(x, y)$ *— раціональна функція своїх аргументів.*

За допомогою підстановки вигляду

$$x = \frac{at+b}{t+1} \quad (\textit{для } a_0 \neq 0) \quad \textit{або} \quad x = t^2 - \alpha \quad (\textit{для } a_0 = 0)$$

інтеграл (1.97) зводиться до вигляду

$$\int R\big(t, \sqrt{\pm(t^2+\alpha)(t^2+\beta)}\big)\, dx\,, \tag{1.98}$$

де α *та* β *— деякі числа. Довільний інтеграл типу (1.98) за рахунок перетворень підінтегральної функції можна звести до комбінації інтегралів від раціональних функцій та еліптичних інтегралів 1-го, 2-го та 3-го родів.*

Еліптичним інтегралом першого роду називається інтеграл

$$F(\varphi, k) = \int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int\limits_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,. \tag{1.99}$$

Еліптичним інтегралом другого роду називається інтеграл

$$E(\varphi, k) = \int\limits_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\, dx\,. \tag{1.100}$$

Еліптичним інтегралом третього роду називається інтеграл

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int\limits_0^{\varphi} \frac{dt}{(1+n\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\,. \tag{1.101}$$

Число k називаєтьcя параметром еліптичного інтегралу (вважаєтьcя $0 < k < 1$), а межа інтегрування φ — амплітудою.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ інтеграли (1.99) та (1.100) називаються повними і позначаються як:

$$K(k) = F(\pi/2, k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}\,, \quad E(k) = E(\pi/2, k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx\,. \tag{1.102}$$

Розклад у ряд Тейлора функцій $K(k)$ та $E(k)$ при $k \ll 1$:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots\right], \tag{1.103}$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots\right]. \tag{1.104}$$

Асимптотики при $k \to 1$:

$$K(k) \simeq \frac{1}{2}\ln\frac{16}{1 - k^2}\,, \quad E(k) \simeq 1\,. \tag{1.105}$$

Еліптичні функкції Якобі вводяться за допомогою обернення функції $F(\varphi, k)$ по амплітуді φ:

$$x = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = F(\varphi, k)\,, \varphi = \operatorname{am}(x, k)\,. \tag{1.106}$$

Функція $\operatorname{am}(x, k)$ називається амплітудою Якобі. Очевидно, функції $F(\varphi, k)$ та $\operatorname{am}(x, k)$ є взаємно оберненими:

$$\operatorname{am}(F(\varphi, k), k) = \varphi\,, \quad F(\operatorname{am}(x, k), k) = x\,.$$

Означення еліптичних функцій:

$$\operatorname{sn}(x, k) = \sin \operatorname{am}(x, k)\,, \quad \operatorname{cn}(x, k) = \cos \operatorname{am}(x, k)\,, \quad \operatorname{dn}(x, k) = \left[1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(x, k)\right]. \tag{1.107}$$

Еліптичні функції — періодичні з періодом $2K$.

Граничні випадки:

Випадок $k = 0$: $\operatorname{am}(x, 0) = x$

$$\operatorname{sn}(x, 0) = \sin x\,, \quad \operatorname{cn}(x, 0) = \cos x\,, \quad \operatorname{dn}(x, 0) = 1$$

Випадок $k = 1$: $\operatorname{am}(x, 0) = 2\operatorname{arctg} e^x - \dfrac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sn}(x, 0) = \operatorname{th} x\,, \quad \operatorname{cn}(x, 0) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,, \quad \operatorname{dn}(x, 0) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,.$$

Формули для похідних еліптичних функцій:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,\mathrm{sn}\,(x,k) &= \mathrm{cn}\,(x,k)\,\mathrm{dn}\,(x,k)\,, \\ \frac{d}{dx}\,\mathrm{cn}\,(x,k) &= -\,\mathrm{sn}\,(x,k)\,\mathrm{dn}\,(x,k)\,, \\ \frac{d}{dx}\,\mathrm{dn}\,(x,k) &= -k^2\,\mathrm{sn}\,(x,k)\,\mathrm{cn}\,(x,k)\,. \end{aligned} \tag{1.108}$$

Поведінка функції $\mathrm{am}\,(x,k)$ *при малих значеннях параметра:*

$$\mathrm{am}\,(x,k) = x - \frac{k^2}{3!}x^3 + \frac{k^2(1+k^2)}{5!}x^5 - \ldots\,. \tag{1.109}$$

Для еліптичних функцій Якобі:

$$\begin{aligned} \mathrm{sn}\,(x,k) &= x - \frac{1+k^2}{3!}x^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}x^5 - \ldots\,, \\ \mathrm{cn}\,(x,k) &= 1 - \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{1+4k^2}{4!}x^4 - \ldots\,, \\ \mathrm{dn}\,(x,k) &= 1 - \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^2(1+k^2)}{4!}x^4 - \ldots\,. \end{aligned}$$

1.152. Довести еквівалентність форм запису еліптичного інтегралу 1-го роду (1.99).

1.153. Довести еквівалентність форм запису еліптичного інтегралу 2-го роду (1.100).

1.154. Перетворити еліптичний інтеграл

$$\int\limits_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}}\,.$$

до стандартної форми.

1.155. Довести розклади (1.103) та (1.104).

1.156. Записати кілька перших доданків розкладу у ряд Тейлора по параметру k неповних еліптичних інтегралів.

1.157. Довести рекурентні співвідношення для повних еліптичних інтегралів:

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k)-K(k)}{k}\,, \quad \frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{1-k^2} - \frac{K(k)}{k}\,.$$

1.158. Довести, що повні еліптичні інтеграли задовольняють диференційним рівнянням:

$$\frac{d}{dk}\left(k(1-k^2)\frac{dK}{dk}\right) - kK = 0\,, \quad (1-k^2)\frac{d}{dk}\left(k\frac{dE}{dk}\right) + kE = 0\,.$$

1.159. Довести вирази для еліптичних функцій Якобі при $k = 0$ та $k = 1$.

1.160. Довести вирази для похідних еліптичних функцій Якобі (1.108).

1.161. Довести вираз (1.109), будуючи ряд, обернений до ряду функції $F(\varphi, x)$.

1.162. Довести вирази для розкладів еліптичних функцій за допомогою формули (1.109).

Відповіді та вказівки

1 Математичні методи електродинаміки

1.3. $\mathrm{div}\,(\varphi\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A}) = \vec{\nabla}(\underline{\varphi}\vec{A} + \varphi\underline{\vec{A}}) = (\vec{\nabla}\underline{\varphi})\cdot\vec{A} + \varphi(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{A}}) = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi + \varphi\ \mathrm{div}\,\vec{A}$.

1.10. 1) $\vec{\nabla}r^2 = \vec{\nabla}(x^2+y^2+z^2) = 2(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z) \equiv 2\vec{r}$. З іншого боку, $\vec{\nabla}r^2 = 2r\vec{\nabla}r$, звідки $\vec{\nabla}r = \vec{r}/r$. Інший спосіб:

$$\vec{\nabla}r = \vec{\nabla}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$$

2) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(xa_x + ya_y + za_z) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \equiv \vec{a}$; 3) $nr^{n-2}\vec{r}$; 4) $(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}/r + r\vec{a}$; 5) $-\alpha\vec{r}/r^3$; 6) $\vec{r}/r^2$; 7) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r} = \left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \equiv \vec{a}$, зауважимо, що у даному випадку вектор $\vec{a}$ може бути змінним; 8) $\vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{b}) + \vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})$; 9) $f(r)\,\vec{a} + f'(r)\,(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}/r$; 10) $2a^2\vec{r} - 2\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{r})$; 11) $2\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{r})$; 12) $\big(r^2\vec{a} - 3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\big)/r^5$.

1.11. 0, $-2\vec{a}$, $\vec{a}$

1.12. 1) 3, 0; 2) $5r^2$, 0; 3) $(n+3)r^n$, 0; 4) $\frac{2}{r}$, 0; 5) 0, 0; 6) $(3-n)r^{-n}$, 0; 7) 0, $2\vec{a}$; 8) $\mathrm{div}\,(\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})) = (\vec{a}\cdot\vec{r})\,\mathrm{div}\,\vec{r} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = 3(\vec{a}\cdot\vec{r}) + \vec{r}\cdot\vec{a} = 4(\vec{a}\cdot\vec{r})$, де використана “елементарна” похідна $\mathrm{div}\,\vec{r} = 3$, $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}$; $\mathrm{rot}\,(\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})) = [\vec{a}\times\vec{r}]$; 9) $(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $-[\vec{a}\times\vec{b}]$; 10) $nr^{n-2}(\vec{a}\cdot\vec{r})$, $nr^{n-2}[\vec{r}\times\vec{a}]$; 11) $2(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $-[\vec{a}\times\vec{b}]$; 12) $-2\vec{a}$, $3[\vec{r}\times\vec{a}]$; 13) 0, $\big(-r^2\vec{a} + 3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}\big)/r^5$; 14) $(\vec{a}\cdot\vec{r})/r^2$, $[\vec{r}\times\vec{a}]/r^2$; 15) 0, $3r\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}/r$.

1.13. 1) $\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\,\vec{\nabla}r \equiv \varphi'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$; 2) $\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{A}'(r)$; 3) $\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{A}'(r)$.

1.14. 1) $\varphi''(r) + 2\varphi'(r)/r$; 2) $\varphi''(r)/r$; 3) $\vec{A}''(r) + \frac{2}{r}\vec{A}'(r)$; 4) $n(n-3)(\vec{a}\cdot\vec{r})r^{-n-2}$.

1.15. 1) $i\vec{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 2) $\frac{ik\vec{r}}{r}\,e^{ikr}$; 3) $\frac{(ikr-1)\vec{r}}{r^3}\,e^{ikr}$; 4) $\big(\vec{a} + i\vec{k}\,(\vec{r}\cdot\vec{a})\big)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 5) $i\,(\vec{k}\cdot\vec{a})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 6) $i\,(\vec{k}\times\vec{a})\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 7) $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left[\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{A}'(r) + i\vec{k}\cdot\vec{A}(r)\right]$;
8) $\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}\,(ikr-1)\,e^{ikr}$; 9) $\frac{ikr-1}{r^3}\,(\vec{r}\times\vec{a}\,)\,e^{ikr}$; 10) $-k^2\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 11) $-\frac{2i(\vec{k}\cdot\vec{r})+k^2r^2}{r^3}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; 12) $\left(\frac{2ik}{r} - k^2\right)\,e^{ikr}$.

1.16. 1)-3) та 5): підстановка векторів $\vec{a}\varphi(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\varphi(r)$, $\vec{a}\times\vec{A}$ та $a_it_{ij}\vec{e}_j$ в теорему Гаусса;
4) *Вказівка:* проміжний результат:

$$\oint\limits_{S(V)} \vec{\nabla}(\vec{n}\cdot\vec{A})\,dS = \int\limits_V \vec{\nabla}\,\mathrm{div}\;\vec{A}\,dV.$$

1.18. $\int_V (\Delta\varphi)^2\,dV.$

1.19. $\oint_{S(V)} \big(\varphi\;\mathrm{rot}\,\vec{A}\big)\cdot\vec{n}\,dS.$

1.20. 1) $\vec{a}V$; 2) $\vec{a}V$; 3) $3\vec{a}V$; 4) $-2\vec{a}V$; 5) $2(\vec{a}\cdot\vec{b})V$.

1.21. $3S\vec{n}$.

1.27. а) $I = \int\limits_V \vec{j}(\vec{r})\,dV = \int\limits_V (\vec{j}\cdot\vec{\nabla})\underline{\vec{r}}\,dV = \int\limits_V \Big((\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{j})\vec{r}} - \vec{r}(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{j}})\Big)\;dV =$

$\oint\limits_S (\vec{n}\cdot\vec{j})\vec{r}\,dS - \int\limits_V \vec{r}\,\mathrm{div}\,\vec{j}\,dV$, при вказаних умовах $I=0$;

$$\text{б) } \int\limits_V \vec{M}\,dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\vec{M}(\nabla\vec{\cdot}\,\underline{\vec{r}}) - \vec{\nabla}(\vec{M}\cdot\underline{\vec{r}})\Big)\;dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big[(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{r})\vec{M}} -$$

$$-\vec{\nabla}(\underline{\vec{M}\cdot\vec{r}}) - (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\underline{\vec{M}} + \vec{\nabla}(\underline{\vec{M}\cdot\vec{r}})\Big]\;dV = -\frac{1}{2}\int\limits_V \Big([\underline{\vec{r}},[\vec{\nabla},\underline{\vec{M}}]] -$$

$$-[\vec{r},[\vec{\nabla},\underline{\vec{M}}]]\Big)\;dV = -\oint\limits_S [\vec{r},[\vec{n},\vec{M}]]\,dS + \frac{1}{2}\int\limits_V [\vec{r},\;\mathrm{rot}\,\vec{M}]\,dV\,.$$

1.28. 0 при довільному об'ємі V.

1.29. 1) $H_r = 1$, $H_\varphi = r$, $H_z = 1$.
Приклад обчислення:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{e}_z = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$$

звідки $H_r = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1$;
2) $\vec{e}_r = \vec{i}\cos\varphi + \vec{i}\sin\varphi$, $\vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{i}\cos\varphi$, $\vec{e}_z = \vec{k}$;
3) $a_x = a_r\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi$, $a_y = a_r\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi$, $a_z = a_z$;
4) $r = \sqrt{x^2+y^2} = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x) = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$.
Геометричний пошук параметрів Ламе:
1. елемент довжини dl_r вздовж лінії $\varphi = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$ (пряма $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$) співпадає з диференціалом dr;
2. елемент довжини dl_φ вздовж лінії $r = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$ (коло $x^2+y^2 = r^2$) рівний

$rd\varphi$ (дуга кола);
3. елемент довжини dl_z вздовж лінії $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ (пряма, паралельна осі z) ї dz.
Просте порівняння з формулами для елементів довжини дає $H_r = H_z = 1$, $H_\varphi = r$. Рекомендується зробити малюнок.

1.30. 1) $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r\sin\theta$;
2) $\vec{e}_r = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta$,
$\vec{e}_\theta = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta$,
$\vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$;
3) $a_x = a_r\sin\theta\cos\varphi + a_\theta\cos\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi$,
$a_y = a_r\sin\theta\cos\varphi + a_\theta\cos\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi$,
$a_z = a_r\cos\theta - a_\theta\cos\theta$;
4) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \text{const}$, $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \text{const}$,
$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

1.33. come soon...

1.34. come soon...

1.36. *Вказівка:* розкладемо вектор $\vec{\nabla}q_i$ по базисах $\vec{e}_i$ та $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: $\vec{\nabla}q_i = \alpha_x\vec{e}_x + \alpha_y\vec{e}_y + \alpha_z\vec{e}_z = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\vec{e}_i$, за означенням $\alpha_x = \frac{\partial q_i}{\partial x}$ і т. д. Тоді $\alpha_j = \vec{e}_j\cdot(\alpha_x\vec{e}_x + \alpha_y\vec{e}_y + \alpha_z\vec{e}_z) = \frac{\vec{e}_i}{H_i}\delta_{ij}$, де використане означення векторів $\vec{e}_i$. Для довільної функції $f(q)$: $\vec{\nabla}f(q) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial q_i}\vec{\nabla}q_i$ (за правилом диференціювання складної функції).

1.37. *Вказівка:* використати тотожність $\operatorname{rot}\vec{\nabla}q_i \equiv 0$ і результат задачі 1.36.

1.38. *Вказівка:* використати результати задач 1.36 та 1.37 у тотожності $\operatorname{div}\vec{e}_1 = \operatorname{div}\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_3\right)$.

1.39. $\Delta\vec{e}_r = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$, $\Delta\vec{e}_\varphi = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_\varphi$, $\Delta\vec{e}_z = 0$.

1.40. $\Delta\vec{e}_r = \frac{2}{r^2}\vec{e}_r$, $\Delta\vec{e}_\theta = -\frac{1}{2\sin^2\theta}\vec{e}_\theta$, $\Delta\vec{e}_\varphi = -\frac{1}{2\sin\theta}\vec{e}_\varphi$.

1.41. *Зауваження:* інша форма запису: $\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q_j} = \frac{\vec{e}_j}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial q_i} - \delta_{ij}\vec{\nabla}H_j$.

1.42. $\vec{\nabla}_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$, $\vec{\nabla}_o = \frac{\partial}{\partial z}$.

1.43. Циліндрична система координат:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(rA_r\big) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,,$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(rA_\varphi\big) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z\,.$$

1.44. Сферична система координат:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,,$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2A_r\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\big(\sin\theta A_\theta\big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\,,$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\big(\sin\theta A_\varphi\big) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\big(rA_\varphi\big)\right]\vec{e}_\theta$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big(rA_\theta\big) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi\,.$$

1.45. Циліндрична система координат:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Сферична система координат:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\,.$$

1.46. Циліндрична система координат:

$$(\Delta\vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\,,$$

$$(\Delta\vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\,,$$

$$(\Delta\vec{A})_z = \Delta A_z\,.$$

Сферична система координат:

$$(\Delta\vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)\,,$$

$$(\Delta\vec{A})_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)\,,$$

$$(\Delta\vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right)\,.$$

1.47. Циліндрична система координат:

$$\begin{aligned}
(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{A})_r =& A_r\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{A_\varphi^2}{r}+A_z\frac{\partial A_r}{\partial z}\,,\\
(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{A})_\varphi =& A_r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{A_rA_\varphi}{r}+A_z\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\,,\\
(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{A})_z =& A_r\frac{\partial A_z}{\partial r}+\frac{A_\varphi}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}+A_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\,.
\end{aligned}$$

1.48. Сферична система координат:

$$\begin{aligned}
(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{A})_r =& A_r\frac{\partial A_r}{\partial r}+\frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}+\frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{A_\theta^2+A_\varphi^2}{r}\,,\\
(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{A})_\theta =& A_r\frac{\partial A_\theta}{\partial r}+\frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}+\frac{A_rA_\theta}{r}-\frac{A_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta}{r}\,,\\
(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\vec{A})_\varphi =& A_r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}+\frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{A_\varphi A_r}{r}+\frac{A_\theta A_\varphi\operatorname{ctg}\theta}{r}
\end{aligned}$$

1.49.

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(\xi,\eta,\zeta) =& \frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)\right.\\
&\left.+(\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)+(\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)\right]
\end{aligned}$$

1.50. Стиснуті сфероїдальні координати I:

$$\Delta f=\frac{4}{\xi-\eta}\left[R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)+R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,,$$

де $R_\xi=\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+c^2)}$, $R_\eta=\sqrt{(\eta+a^2)(-\eta-c^2)}$.

Витягнуті сфероїдальні координати I:

$$\Delta f=\frac{4}{\xi-\zeta}\left[R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)+R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial f}{\partial\zeta}\right)\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,,$$

де $R_\xi=\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)}$, $R_\eta=\sqrt{(\eta+a^2)(-\zeta-b^2)}$.

Стиснуті сфероїдальні координати II:

$$\begin{aligned}
\Delta f =& \frac{1}{c\xi}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{c\eta}\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)\\
&+\frac{1}{c^2\xi^2\eta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}$$

Витягнуті сфероїдальні координати II:

$$\Delta f = \frac{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{c(\xi^2-\eta^2)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\xi^2-1)\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left((1-\eta^2)\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\,.$$

1.54. Нам потрібно показати, що властивість (1.53) справедлива для $\delta(x)=\eta'(x)$. Для будь-якої досить гладкої функції $f(x)$ маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\eta'(x)\,dx = \left. f(x)\eta(x)\right|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\eta(x)\,dx = f(+\infty) - \int\limits_{0}^{+\infty} f'(x)\,dx = f(0)\,.$$

1.64. 1) у сферичних координатах $\rho(\vec{r})=\sigma\delta(r-R)$;
2) у сферичних координатах $\rho(\vec{r})=\dfrac{e}{2\pi R}\delta(r-R)\delta(\cos\theta)$, в циліндричних координатах $\rho(\vec{r})=\frac{e}{2\pi R}\delta(r-R)\delta(z)$;
3) у сферичних координатах $\rho(\vec{r})=\dfrac{e}{\pi R^2}\chi_{[0,R]}(r)\delta(\cos\theta)$, в циліндричних координатах $\rho(\vec{r})=\dfrac{e}{\pi R^2}\chi_{[0,R]}(r)\delta(z)$;
4) в циліндричних координатах $\rho(\vec{r})=\sigma\delta(r-R)\chi_{0,h}(z)$;
5) у декартових координатах $\rho(\vec{r})=\sigma\delta(z)$, у сферичних координатах $\rho(\vec{r})=\frac{\sigma}{r}\delta(\theta-\dfrac{\pi}{2})$;
6) у декартових координатах $\rho(\vec{r})=e\delta(x)\delta(y)\chi_{-a,a}(z)$, в циліндричних координатах $\rho(\vec{r})=\frac{e}{\pi r}\delta(r)\chi_{-a,a}(z)$, у сферичних координатах $\rho(\vec{r})=\frac{2e}{\pi r^2}\delta(1-\cos^2\theta)\eta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\chi_{-a,a}(r)$;
7) у декартових координатах $\rho(\vec{r})=e\delta(x)\delta(y)$, в циліндричних координатах $\rho(\vec{r})=\frac{\varkappa}{\pi r}\delta(r)$, у сферичних координатах $\rho(\vec{r})=\frac{2e}{\pi r^2}\delta(1-\cos^2\theta)$;
8) у сферичних координатах $\rho(\vec{r})=\sigma\delta(r-R)\chi_{[0,\pi/2]}(\theta)$.
Вказівка: come soon...

1.65. 1) в циліндричних координатах $\vec{j}=\vec{i}\delta(r-R)$,
2) у декартових координатах $\vec{j}=\vec{i}\delta(z)$,
3) в циліндричних координатах $\vec{j}=\pm I\delta(r-R)\delta(z)\vec{e}_\varphi$ (знак визначається напрямком струму),
4) у сферичних координатах $\vec{j}=\sigma\omega\sin\theta r\delta(r-R)\vec{e}_\varphi$,
5) у сферичних координатах $\vec{j}=\sigma\omega\sin\alpha\delta(\theta-\alpha)\vec{e}_\varphi$.

1.68. Використовуючи формули Ейлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, перепишемо суму (1.27) таким чином:

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}\,x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}\,x\right)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ia_n+b_n}{2i}\,e^{i\pi n/l}+\frac{ia_n-b_n}{2i}\,e^{-i\pi n/l}\right)$$

Далі, перейменувавши $c_o = a_o/2$, $c_{\pm n} = \dfrac{ia_n \pm b_n}{2i}$ (for $n > 0$), отримуємо

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n/l}\,,$$

де враховуючи (1.28)

$$c_{\pm n} = \frac{ia_n \pm b_n}{2i} = \frac{1}{2li}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\left(i\cos\frac{\pi nx}{l} \pm \sin\frac{\pi nx}{l}\right)dx = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\pi nx/l}\,dx\,,$$

та

$$c_o = \frac{1}{2}\,a_o = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx\,.$$

1.69. Оскільки функція $f(x)$ є непарною, всі a_h's зникають, і отже,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin\pi x\,dx = \frac{2}{\pi n}\big[1-(-1)^n\big]\,,$$

отже $n = 2k+1$ та

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\,.$$

1.70. Ця функція не має жодної парності, отже

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos\pi x\,dx = 0\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin\pi x\,dx = \frac{1-(-1)^n}{\pi n}\,,$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 1\,.$$

Тому,

$$\eta(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\,.$$

1.71. Відповідь:

$$e^x = \frac{\operatorname{sh} x}{\pi} + \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\left[\cos\pi n - n\sin\pi n\right]\,.$$

1.72. Відповіді:

$$\text{a) } x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}\,, \quad \text{b) } |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\,.$$

1.73. a) Для знаходження коефіцієнтів b_n (всі a_n дорівнюють нулю), нам потрібно обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx, dx$. Найпростіший спосіб зробити це - переписати функцію синус як уявну частину експоненти. Використовуючи,

$$\int e^x \sin nx\, dx = \operatorname{Im} \int e^{(1+in)x} dx = \operatorname{Im} \frac{e^{(1+in)x}}{1+i} = e^x \frac{\sin nx - n\cos nx}{1+n^2},$$

отримуємо

$$\int \operatorname{sh} x \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int (e^x - e^{-x}) \sin nx\, dx = \frac{\operatorname{ch} x \sin nx - n \operatorname{sh} x \cos nx}{1+n^2}\,,$$

так що

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx\, dx = \frac{(-1)^n n \operatorname{sh}\pi}{1+n^2}\,.$$

Остаточно,

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh} x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{1+n^2}\,.$$

b) Аналогічно до a), можна отримати

$$\int \operatorname{ch} x \sin nx\, dx = \frac{\operatorname{sh} x \cos nx + n \operatorname{ch} x \sin nx}{1+n^2}\,.$$

Отже,

$$\operatorname{ch} x = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{1+n^2}\,.\right]$$

c) Функція $x\cos x$ непарна, тому достатньо знайти лише b_n. Використовуючи інтеграл

$$\int x \sin ax\, dx = \frac{\sin ax - ax\cos ax}{a^2},$$

можемо переписати

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\big[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\big]\, dx = \frac{2(-1)^n}{n^2-1}\,.$$

Коефіцієнт b_1 необхідно знайти окремо,

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\,,$$

тому що

$$x\cos x = -\frac{1}{2}\,\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^2-1}\,.$$

d) Відповідь:

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-1}\,.$$

1.76. Легко показати, що

$$1 - 2q\cos x + q^2 = (1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})\,,$$

отже, комбінуючи обидві функції, можемо записати:

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) = \frac{1 - q\cos x + iq\sin x}{1 - 2q\cos x + q^2} = \frac{1 - qe^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} = \frac{1}{1 - qe^{ix}}\,,$$

тому що

$$f(x) = \frac{1}{1 - qe^{ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{inx}\,.$$

Остаточно,

$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n\cos nx\,, \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n\sin nx\,.$$

1.77. Відповідь: $f(x) = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n\cos nx$.

1.78. Відповідь:

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^m}\,C_{2m}^{m} + \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=1}^{m} C_{2m}^{m-k}\cos 2kx$$

(використовуючи формули Ейлера $\cos x = \big(e^{ix} + e^{-ix}\big)/2$).

1.81. Маємо:

$$c_n = \frac{a}{2}\int\limits_{-a^{-1}}^{a^{-1}} e^{ax - i\pi nx}dx = \frac{2(-1)^n\operatorname{sh}1}{1 + i\pi n}\,,$$

тому що

$$e^{ax} = 2\operatorname{sh}1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1 + i\pi n}\,e^{i\pi anx}\,.$$

1.81. Нехай $f(x) \to \hat{f}(k)$.
1) поки $xe^{ikx} = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dk}xe^{ikx}$, можемо переписати

$$x^n f(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{ikx}\,dx = \frac{1}{i}\frac{d}{dk}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} f(x) e^{ikx}\,dx = \ldots$$

$$= \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{dk^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\,dx = \frac{1}{i^n}\frac{d^n \hat{f}(k)}{dk^n}\,.$$

2) Інтегруючи за частинами, припускаючи, що $f^{(k)}(x) \to 0$ як $x \to \pm\infty$ для $k = \overline{0,n}$, отримуємо

$$f^{(n)}(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{ikx}\,dx = -ik\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(x) e^{ikx}\,dx = \ldots$$

$$= (-ik)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\,dx = \frac{k^n}{i^n}\,\hat{f}(k)\,.$$

3) Пряма підстановка призводить до

$$f(ax) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{ikx}\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx/a}\,dx = \frac{1}{a}\,\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)\,.$$

4) Аналогічно,

$$f(-x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{ikx}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx}\,dx = \hat{f}(-k)\,.$$

5) Аналогічно,

$$f(x+x_o) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+x_o) e^{ikx}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ik(x-x_o)}\,dx = e^{-ikx_o}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx}\,dx = e^{-ikx_o}\hat{f}(k)\,.$$

6) Аналогічно,

$$e^{ik_o x} f(x) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i(k+k_o)x}\,dx = \hat{f}(k+k_o)\,.$$

1.82. 1) Нехай $f(x) = f(-x)$, тому

$$\hat{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx = \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{\infty}\right) f(x)e^{ikx}\,dx$$
$$= \int\limits_{0}^{\infty} \big(f(x)e^{ikx} + f(-x)e^{-ikx}\big)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos kx\,dx\,.$$

бачимо, що $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$.
2) Аналогічно, коли $f(-x) = -f(x)$ отримуємо

$$\hat{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\,dx = \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{\infty}\right) f(x)e^{ikx}\,dx$$
$$= \int\limits_{0}^{\infty} \big(f(x)e^{ikx} - f(-x)e^{-ikx}\big)\,dx = 2i\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin kx\,dx\,.$$

тому $\hat{f}(k) = -\hat{f}(-k)$.

1.83. 1) Диференціюючи функцію

$$\hat{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}e^{ikx}\,dx$$

щодо k і інтегруючи за частинами, отримуємо

$$\frac{d}{dk}\hat{f}(k) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\alpha^2x^2}e^{ikx}\,dx = -\frac{i}{2\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,de^{-\alpha^2x^2} = -\frac{k}{2\alpha^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}e^{ikx}\,dx = -\frac{k}{2\alpha^2}\,f(k)\,,$$

маємо наступне диференціальне рівняння для $\hat{f}(k)$

$$\frac{d\hat{f}(k)}{dk} = -\frac{k}{2\alpha^2}\,f(k)\,, \quad \hat{f}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

з розв'язком

$$\hat{f}(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,e^{-k^2/4\alpha^2}\,.$$

2) Отримуємо для $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$:

$$\hat{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos kx}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{k}}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

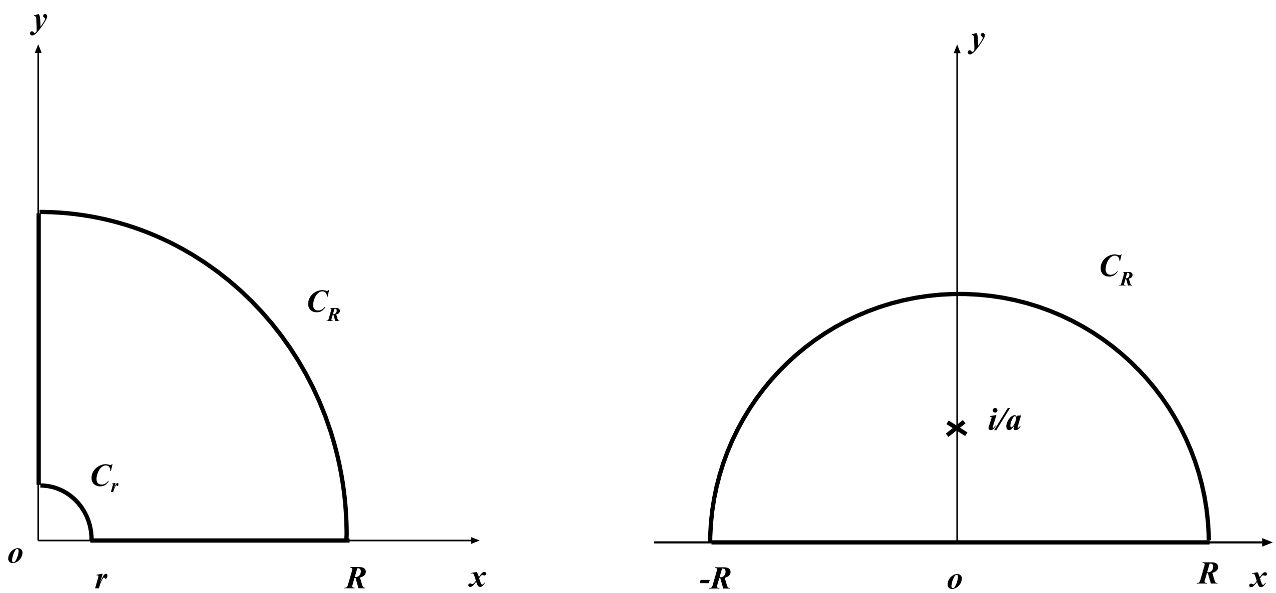

Рис. 2: To the problem 1.83, 2) and 3)

Останній інтеграл - це відомий інтеграл Френеля,

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Цей результат можна отримати, спочатку замінивши $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy^2}, dy$ і змінивши порядок інтегрування (ми пропонуємо читачеві виконати це обчислення), а також, використовуючи теорему Коші для замкнутої кривої, побудованої з ліній $y \in [r, R]$, $x \in [r, R]$ та чвертей кола C_r, C_R радіусів r і R відповідно, що лежать в першому квадранті (див. рисунок 2). Згідно з теоремою Коші, інтеграл по замкнутій криві L зникає:

$$0 = \oint\limits_L \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\,dz = \oint\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\,dz + \sqrt{i}\int\limits_R^r \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy + \oint\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}\,dz + \int\limits_r^R \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Коли $r \to 0$, $R \to \infty$,то можемо бачити, що $\oint_{C_R}[\dots]$, $\oint_{C_r}[\dots] \to 0$. Таким чином

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{i}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy = 2\sqrt{i}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi i} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

отже,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \operatorname{Re}\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Остаточно, $\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi/k}$.
3) Маємо

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{1+\alpha^2x^2}\,dx \equiv \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos kx}{1+\alpha^2x^2}\,dx\,,$$

тобто, приходимо до добре відомого інтегралу Лапласа. Перший спосіб обчислення полягає в підстановці

$$\frac{1}{1+\alpha^2x^2} = \int_0^\infty e^{-y(1+\alpha^2x^2)}dy$$

і змінюючи порядок інтегрування відносно x та y (рекомендуємо зробити це). Найпростіший спосіб використовувати теорему Коші для замкнутої кривої, яка показана на рисунку 2 (тут C_R позначає півколо радіуса R) для функції $f(z) = \dfrac{e^{ikz}}{1+\alpha^2z^2}$ з простою особливою точкою $z = i/\alpha$ у верхній півплощині:

$$\oint_L \frac{e^{ikz}}{1+\alpha^2z^2}\,dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{1+\alpha^2x^2}\,dx + \int_{C_R}\frac{e^{ikz}}{1+\alpha^2z^2}\,dz$$
$$= 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{e^{ikz}}{1+\alpha^2z^2}, \frac{i}{\alpha}\right] = 2\pi i(z-i/\alpha)\frac{e^{ikz}}{1+\alpha^2z^2}\bigg|_{z=i/\alpha} = \frac{\pi}{\alpha}\,e^{-k\alpha}\,.$$

Згідно з лемою Жордана (див. [8]), $\int_{C_R}[\dots] \to 0$ при $R \to \infty$, для $k > 0$[4] тому що

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{1+\alpha^2x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{1+\alpha^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{\alpha}\,e^{-\alpha k}\,.$$

4) Маємо, використовуючи попередній приклад,

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos k_o x}{1+\alpha^2x^2}\,e^{ikx}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(k+k_o)x}+e^{i(k-k_o)x}}{1+\alpha^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha k}\operatorname{ch}k_o\alpha$$

[4] коли $k < 0$, півколо має бути намальоване в нижній півплощині з обміном $k \to |k|$ в інших місцях.

for $k > 0$.
5) Простим обчисленням інтегралу ми отримуємо

$$\hat{f}(k) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\alpha - ik}\,.$$

6) Аналогічно,

$$\hat{f}(k) = \int\limits_{-1}^{1} e^{ikx}\, dx = \frac{2\sin ka}{k}\,.$$

1.84. Спочатку знайдемо два інтеграли:

$$\int\limits_0^\infty \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{ikx}\, dx = \pi\delta(k)\,,$$

і

$$\int\limits_0^\infty \sin kx\, dx = \int\limits_0^\infty \cos k\left(x - \frac{\pi}{2k}\right)\, dx = \int\limits_0^\infty \cos kx\, dx + \int\limits_0^{\pi/2k} \cos kx\, dx = \pi\delta(x) + \frac{1}{k}\,.$$

Тоді

$$\int\limits_0^\infty e^{\pm ikx} dx = \pi(1 \pm i)\delta(x) \pm \frac{i}{k}\,.$$

1) $\operatorname{sign} x \to \int_0^\infty (e^{ikx} - e^{-ikx}) dx = 2i\left(\pi\delta(x) + \dfrac{1}{k}\right)$.

2) $\eta(x) \to \int_0^\infty e^{ikx} dx = \pi(1+i)\delta(x) + \dfrac{i}{k}$.

3) $\sin x \to \int_{-\infty}^\infty \sin x e^{ikx}\, dx = \dfrac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \left(e^{i(k+1)x} - e^{i(k-1)x}\right) dx = \pi i\big[\delta(k-1) - \delta(k+1)\big]$.

4) $\cos x \to \int_{-\infty}^\infty \cos x e^{ikx}\, dx = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \left(e^{i(k+1)x} + e^{i(k-1)x}\right) dx = \pi\big[\delta(k+1) + \delta(k-1)\big]$.

5) $e^x \to \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} e^x\, dx = 2\pi\delta(k - i)$.

6) У цьому випадку можемо переписати

$$\frac{1}{x} \to f(k) = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikx}}{x}\, dx\,,$$

отже,

$$f'(k) = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dx = 2\pi i \delta(k)\,,$$

отже

$$f(k) = 2\pi i \int \delta(k)\, dk = 2\pi i(\delta(k) - k\delta'(k))\,.$$

7) Виділяючи похідну відносно k, як в наступному, ми отримуємо

$$x^n \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{ikx} dx = \frac{1}{i}\frac{d}{dk}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} e^{ikx} dx = \cdots = \frac{1}{i^n}\frac{d^n}{dk^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, dx = 2\pi(-1)^n i^n \delta^{(n)}(k)\,.$$

8) $\delta(x) \to 1$.
9) Використовуючи результат 7), отримуємо

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n \to \sum_{k=0}^{n} a_n \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dk}\right)^n \delta(k)\,.$$

1.85. Нехай $\varphi(\vec{r}) \to \varphi(\vec{k})$ та $\vec{A}(\vec{r}) \to \vec{A}(\vec{k})$. Далі інтегруючи частинами та використовуючи теорему Гаусса, отримуємо:

$$\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \to \int\limits_V \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV = -\int\limits_V \varphi(\vec{r})\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV = -i\vec{k}\varphi(\vec{k})\,,$$

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) \to \int\limits_V \operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV = -\int\limits_V \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV = -i\vec{k}\cdot\vec{A}(\vec{k})\,,$$

$$\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) \to \int\limits_V \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV = \int\limits_V \vec{A}(\vec{r})\times\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV = -i\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k})\,.$$

З цього можна зробити висновок, що перетворення функцій з диференціальним оператором $\vec{\nabla}$ ми можемо просто замінити вектор $-i\vec{k}$ замість $\vec{\nabla}$, зберігаючи той самий тип множення (скалярне, векторне або їх комбінації).

1.87. Нехай $f(x) = (x^2-1)^n$. Отже, функція $f(x)$ задовольняє рівняння

$$(x^2-1)f'(x) - 2nxf(x) = 0\,.$$

Диференціювання цього рівняння $n+1$ разів призводить до рівняння Лежандра для $f^{(n)}(x)$.

1.88. *Перший спосіб.*

$$\begin{aligned} P_n(1) = &\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\big[(x-1)(x+1)\big]^n\bigg|_{x=1} \\ &= \big[(2n)!(x+1)^n + (2n-1)!(x-1)(x+1)^{n-1} + \ldots\big]_{x=1} = 1\,, \end{aligned}$$

Тоді як $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, that $P_n(-1) = (-1)^n$. Для $P_n(0)$ отримуємо подібним чином:

$$\begin{aligned}P_{2k}(0) =& \frac{1}{2^{2k}(2k)!}\,\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^2-1)^{2k}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2^{2k}(2k)!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i x^{2i}(-1)^{2k-i}\big|_{x=0} \\ =& \frac{1}{2^{2k}(2k)!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\sum_{i=0}^{2k}\big(\dots + C_{2k}^k x^{2k}(-1)^k + \dots\big)\big|_{x=0} = (-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,,\end{aligned}$$

результат відображається в чітко написаному вигляді. Що стосується $n = 2k+1$, завдяки властивості $P_{2k+1}(-x) = -P_{2k+1}(x)$ випливає, що $P_{2k+1}(0) = 0$.
Другий спосіб.

$$F(t,1) \equiv \frac{1}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n = 1 + t + t^2 + \dots\,,$$

таким чином $P_n(1) = 1$.

$$F(t,0) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n = 1 - \frac{1}{2}\,t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)t^4 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,,$$

так що

$$P_n(0) = \begin{cases} 0\,, & n = 2k+1\,, \\ (-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = (-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,, & n = 2k\,. \end{cases}$$

1.89. Нехай $m > n$, інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx \\ &= \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}(x^2-1)^m\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n\,dx\,.\end{aligned}$$

перший член зник, оскільки він пропорційний $(x-1)(x+1)$. Виконуючи цю процедуру m разів, отримуємо

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^m}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n\,dx\,.$$

Якщо $m > n$, то підінтегральна функція обертається в нуль як похідна порядку $m+n > 2n$ ступеня полінома $2n$.

Коли $m = n$, то

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\,dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx\,,$$

роблячи заміну $x = 2t - 1$ в отриманому інтегралі

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx = (-1)^n 2^{2n-1} \int_{0}^{1} t^n (1-t)^n \, dt = (-1)^n 2^{2n-1} B(n+1, n+1) = \frac{(-1)^n 2(2n)!!}{(2n-1)!!} \,,$$

так що

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \,.$$

1.90. Використовуючи формулу (1.41) можемо переписати

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \,, \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x \, P_n(x) \, dx \,.$$

Коефіцієнти a_n можна отримати за допомогою формули Родрігеса:

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x \, P_n(x) \, dx = \int_{0}^{1} P_n(x) \, dx - \int_{-1}^{0} P_n(x) \, dx = \int_{0}^{1} \big[P_n(x) - (-1)^n P_n(x) \big] \, dx \,,$$

тому цей інтеграл дорівнює нулю для $n = 2k$. Коли $n = 2k+1$ отримуємо

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x \, P_{2k+1}(x) \, dx = 2 \int_{0}^{1} P_{2k+1}(x) \, dx = \frac{1}{2^{2k}(2k+1)!} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2-1)^{2k+1} \Big|_{x=0}^{x=1}$$

Ця функція дорівнює 0 при $x = 1$, отже

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sign} x \, P_{2k+1}(x) \, dx = -\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (x^2-1)^{2k+1} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!}$$

$$\times \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \big[\cdots + C_{2k+1}^{k} x^{2k} (-1)^{k+1} + \ldots \big]_{x=0} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(2k+1)!} \, C_{2k+1}^{k} = \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(2k-1)!!}{(k+1)!} \,.$$

Остаточно,

$$\operatorname{sign} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \frac{(4k+3)(2k-1)!!}{(k+1)!} \, P_n(x) \,.$$

1.91. Аналогічно до проблеми 1.90:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \,, \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) \, dx \,.$$

Підставляючи функцію $f(x)$ в інтеграл отримуємо

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int\limits_0^1 P_n(x)\,dx = \frac{2n+1}{2^{n+1}\,n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)\Big|_{x=0}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\delta_{ko}\,, & n = 2k\,,\\ \dfrac{(-1)^k(4k+3)(2k)!}{2^{2k+2}k!(k+1)!}\,, & n = 2k+1\,. \end{cases}$$

1.92. Тоді як $f(x) = x^n$ може бути парною або непарною функцією залежно від n, можемо розглянути випадки, коли n - окремо парне або непарне число. В обох випадках

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x)\,, \quad a_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx\,.$$

1) Випадок $f(x) = x^{2n}$, here $a_{2k+1} = 0$ and $a_l = 0$ for all $l > 2n$. Маємо

$$a_{2k} = \frac{4k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^{2n}P_{2k}(x)\,dx = \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\int\limits_0^1 x^{2n}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^2-1)^{2k}\,dx\,.$$

Інтегруючи частинами $2k$ разів, призводить до

$$a_{2k} = \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\frac{(2n)!}{(2(n-k))!}\int\limits_0^1 x^{2(n-k)}(x^2-1)^{2k}\,dx\,.$$

Підставивши $x = \sin\varphi$, можемо переписати цей інтеграл як

$$a_{2k} = \frac{4k+1}{2^{2k}(2k)!}\frac{(2n)!}{(2(n-k))!}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2(n-k)}x\cos^{4k+1}x\,dx = \frac{(4k+1)(2(n-k)+1)!}{2^{2k}(2k)!}$$
$$\times\frac{1}{2}\,B(n-k+1/2, 2k+1) = (4k+1)\frac{(2(n-k)-1)!!}{(2(n+k)-1)!!}\frac{(2n)!}{(2(n-k))!}\,,$$

де ми використали формулу $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$. Коли $n = k$ у цій формулі $(-1)!!$ вважається 1.

2) Випадок $f(x) = x^{2n+1}$, here $a_{2k} = 0$ and $a_l = 0$ for all $l > 2n$. Отримуємо аналогічним чином

$$a_{2k+1} = (4k+3)\int\limits_0^1 x^{2n+1}P_{2k+1}(x)\,dx = \frac{4k+3}{2^{2k+1}(2k+1)!}\int\limits_0^1 x^{2n+1}\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}(x^2-1)^{2k+1}\,dx\,.$$

Інтегруючи частинами $2k+1$ разів, призводить до

$$a_{2k+1} = \frac{4k+3}{2^{2k+1}(2k+1)!}\frac{(2n+1)!}{(2(n-k))!}\int\limits_0^1 x^{2(n-k)}(x^2-1)^{2k+1}\,dx$$

$$= -(4k+3)\frac{(2(n-k)-1)!!}{2(n+k)+3)!!}\frac{(2n+1)!!}{(2(n-k))!!}\,.$$

1.93. Пропонуємо читачеві довести рекурентні співвідношення першим способом. Другий шлях полягає в наступному. Функція зміни значення для поліномів Лежандра є Другий спосіб полягає в наступному. Функція значень на проміжку для поліномів Лежандра:

$$F(x,t) = \frac{1}{\left[1-2xt+x^2\right]^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)\,.$$

Давайте знайдемо похідні обох частин відносно t та x.
1) Похідна по t є

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \frac{x-t}{\left[1-2xt+x^2\right]^{3/2}} = \frac{x-t}{1-2xt+x^2}\,F(x,t)\,,$$

або

$$\left(1-2xt+t^2\right)\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = (x-t)F(x,t)\,.$$

Підставляючи степеневий ряд для $F(x,t)$ і $F'_t(x,t)$, отримуємо

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}P_n(x) = (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)\,,$$

або

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n P_{n+1}(x) = (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)\,.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, отримуємо

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0\,, \quad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad \text{for } n \geqslant 1\,.$$

2) Похідна по x має вигляд

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{t}{\left[1-2xt+x^2\right]^{3/2}} = \frac{t}{1-2xt+x^2}\,F(x,t)\,,$$

або

$$\left(1-2xt+t^2\right)\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = tF(x,t)\,.$$

Тому

$$\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} P_n(x)\,.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо

$$P_0'(x)=0\,,\quad P_1'(x)-P_0'(x)=0\,,\quad P_n'(x)-2xP_{n-1}'(x)+P_{n-2}'(x)=P_{n-1}(x)\quad \text{for } n\geqslant 2\,.$$

1.94. 1) Цей інтеграл можна обчислити за допомогою формули Родрігеса (див. проблему 1.91). Інший спосіб полягає у використанні рекурентного відношення

$$P_n(x)=\frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\right),$$

так що

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = -\frac{1}{2n+1}\left(P_{n+1}(0)-P_{n-1}(0)\right),$$

оскільки $P_n(1)=0$. Using $P_{2k+1}(0)=0$ and $P_{2k}=(-1)^k\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$ (див задачу 1.88) робимо висновок, що

$$\int_0^1 P_{2k}(x)\,dx=\delta_{k0}\,,$$

та

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x)\,dx=\frac{(-1)^k}{4k+3}\left[\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}-\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}\,.$$

2) За допомогою рекурентного співвідношення $(2n+1)xP_n(x)=\left[nP_{n-1}(x)+(n+1)P_{n+1}(x)\right]$ можемо звести цей інтеграл до попереднього, а саме

$$\int_0^1 xP_n(x)\,dx=\frac{n+1}{2n+1}\int_0^1 P_{n+1}(x)\,dx+\frac{n}{2n+1}\int_0^1 P_{n-1}(x)\,dx\,.$$

Очевидно, для $n=2k+1$ інтеграл обертається в нуль. Коли $n=2k$, маємо

$$\int_0^1 xP_{2k}(x)\,dx=\frac{2k+1}{4k+3}\int_0^1 P_{2k+1}(x)\,dx+\frac{2k}{4k+3}\int_0^1 P_{2k-1}(x)\,dx$$
$$=\frac{2k+1}{4k+3}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}-\frac{2k}{4k+3}\frac{(-1)^k(2(k-1))!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}=\frac{(-1)^{k+1}}{4k+3}\frac{3(2(k-1))!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}\,.$$

3) Використовуючи рекурентне співвідношення

$$xP_n(x) = \frac{1}{2n+1}\big[nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x)\big]$$

та умову нормування для (normalization condition??) P_n's, можемо переписати

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_m(x)\big[nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x)\big]\,dx$$
$$= \frac{n+1}{2n+1}\frac{2}{2m+1}\,\delta_{m,n+1} + \frac{n}{2n+1}\frac{2}{2m+1}\,\delta_{m,n-1}\,.$$

1.95. Беручи похідну від функції значень на проміжку

$$F(x,t) = \frac{1}{\big[1-2xt+t^2\big]^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

відносно x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{t}{\big[1-2xt+t^2\big]^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'(x)\,,$$

та використовуючи рекурентне співвідношення $(2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)$, можемо записати

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^nP_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)t^nP_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)t^nP_{n+1}'(x)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)t^nP_{n-1}'(x) = 1 + \frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x) - t\right) - t\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)$$
$$= \left(\frac{1}{t} - t\right)\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x) = \frac{1-t^2}{t}\frac{t}{\big[1-2xt+t^2\big]^{3/2}} = \frac{1-t^2}{\big[1-2xt+t^2\big]^{3/2}}\,.$$

1.96. Використовуючи означення

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_l(x)}{dx^m} \quad \text{or} \quad P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\,\frac{d^mP_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m}$$

знаходимо

$$
\begin{aligned}
&P_1^1(x) = \left(1-x^2\right)^{1/2} = \sin\theta\,,\\
&P_2^1(x) = 3\left(1-x^2\right)^{1/2}x = 3\sin\theta\cos\theta\,,\\
&P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}\,(1-\cos 2\theta)\,,\\
&P_3^1(x) = \frac{3}{2}\,(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1) = \frac{3}{8}\,(\sin\theta + 5\sin 3\theta)\,,\\
&P_3^2(x) = 15(1-x^2)x = \frac{15}{4}\,(\cos\theta - \cos 3\theta)\,,\\
&P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2} = \frac{15}{4}\,(3\sin\theta - \sin 3\theta)\,.
\end{aligned}
$$

та $P_n^0(x) \equiv P_n(x)$.

1.97. Доведення полягає у прямій підстановці. Зручно шукати розв'язок у вигляді $y(x) = \left(1-x^2\right)^{m/2}v(x)$ та довести, що функція $v(x)$ задовольняє рівняння, яке збігається з m-м похідною від рівняння Лежандра:

$$
\frac{d}{dx}\left[v^{(m+1)}(x) - 2mxv^{(m)}(x)\right] = \left[m(m+1) - n(n+1)\right]v^{(m)}(x)\,.
$$

1.98. Використовуючи правило Лейбніца для похідних $\dfrac{d^{n\pm m}}{dx^{n\pm m}}(x^2-1)^n = \dfrac{d^{n\pm m}}{dx^{n\pm m}}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right]$, отримуємо

$$
\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n = \sum_{k=0}^{n-m} C_{m+n}^{m+k}\frac{n!}{(n-m+k)!}\frac{n!}{k!}\,(x+1)^{n-m-k}(x-1)^k\,,
$$

та

$$
\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(x^2-1\right)^n = \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^{k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{(m+k)!}\,(x+1)^{n-k}(x-1)^{k+m}\,.
$$

Порівнюючи ці вирази, ми приходимо до (1.48).

1.99. Цю формулу можна довести безпосередньо за допомогою формули Родріга, як у задачі 1.89.

1.100. Нехай $P_l^m(x_o) = 0$, $Q_l^m(x_o) = 0$ для деяких l і θ_l^m позначає будь-яку з функцій $P_l^m(x) = 0$, $Q_l^m(x) = 0$ або їх лінійну комбінацію. Два рівняння Лежандра для різних порядків l і l' представлені

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\frac{d^2\theta_l^m}{dx^2} - 2x\frac{d\theta_l^m}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\theta_l^m(x) = 0\,,\\
&(1-x^2)\frac{d^2\theta_{l'}^m}{dx^2} - 2x\frac{d\theta_{l'}^m}{dx} + \left(l'(l'+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\theta_l^m(x) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Помноживши перше рівняння на $\theta_l^m(x)$, і друге — на $\theta_{l'}^m(x)$ та віднявши отримані вирази, отримуємо

$$\frac{d}{dx}\big[(1-x^2)\big(\theta_{l'}^{m\prime}(x))\theta_l^m(x)-\theta_{l'}^m(x))\theta_l^{m\prime}(x)\big)\big]+(l-l')(l+l'+1)\theta_l^m(x)\theta_{l'}^m(x)=0\,.$$

Інтегруючи це вираз по $[x_o,1]$ отримуємо

$$\int\limits_{x_o}^{1}\theta_l^m(x)\theta_{l'}^m(x)\,dx=-\frac{(l-l')}{(l+l'+1)}\left[(1-x^2)\big(\theta_l^{m\prime}(x))\theta_{l'}^m(x)-\theta_l^m(x))\theta_{l'}^{m\prime}(x)\,.)\right]_{x_o}^{1}\,.$$

Коли $l\neq l'$, права частина оберататься в нуль, так як $\theta_l^m(x_o)=\theta_{l'}^m(x_o)=0$.

Для $l=l'$ позначимо $l-l'=\delta l'$ і $\theta_l^m(x)-\theta_{l'}^m(x)\simeq\delta l'\dfrac{\partial\theta_{l'}^m}{\partial l'}$, таким чином

$$\theta_{l'}^{m\prime}(x))\theta_l^m(x)-\theta_{l'}^m(x))\theta_l^{m\prime}(x)=\frac{\partial\theta_{l'}^m}{\partial x}\frac{\partial\theta_{l'}^m}{\partial l'}\delta l'-\theta_{l'}^m\frac{\partial^2\theta_{l'}^m}{\partial x\partial l'}\delta l'$$

Отже

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_o}^{1}\big[\theta_l^m(x)\big]^2dx&=\lim_{\delta l'\to 0}\frac{1-x_o^2}{(\delta l')(l+l'+1)}\left[\delta l'\frac{\partial\theta_l^m}{\partial x}\frac{\partial\theta_l^m}{\partial l'}-\theta_{l'}^m\frac{\partial^2\theta_{l'}^m}{\partial x\partial l'}\delta l'\right]_{x_o}^{1}\\&=-\frac{1-x_o^2}{2l+1}\left[\frac{\partial\theta_l^m}{\partial x}\frac{\partial\theta_l^m}{\partial l'}\right]_{x=x_0}\,.\end{aligned}$$

1.101. Використовуючи формулу Родріга, відповідь:

$$P_{2n}(0)=0\,,\quad P_{2n+1}(0)=\frac{(-1)^{n+1}\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3/2)}=\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!}{(2n)!!}\,.$$

1.102. Використовуючи визначення of $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ та результати задачі 1.96.

1.103. Ці властивості випливають з визначення $Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

1.104. Підставивши $y(x)=x^\alpha\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ у рівняння Бесселя і порівнявши коефіцієнти при однакових степенях x отримуємо

$$\begin{aligned}x^0:&\quad\alpha^2-\nu^2=0\,,\\x^1:&\quad\big((\alpha+1)^2-\nu^2\big)a_1=0\,,\\\dots&\\x^n:&\quad\big[(\alpha+1)^2-\nu^2\big]a_n+a_{n-2}=0\,.\end{aligned}$$

З першого рівняння випливає, що $\alpha = \pm\nu$. У випадку $\alpha = \nu$ (скінченний розв'язок при $x = 0$) можемо призначити $a_0 \neq 0$ and $a_1 = 0$, таким чином

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(2\nu + n)}\,,$$

отже $a_{2k+1} = 0$ та

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}\,.$$

Таким чином, ми можемо записати розв'язок рівняння Бесселя у вигляді степеневого розкладу

$$y(x) = a_0 x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(\nu+1)\dots(\nu+k)}\, x^{2k} = x^\alpha a_0 \Gamma(\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^{2k} k!\Gamma(\nu+k+1)}\, x^{2k}\,.$$

Зручно позначити $a_0 = 1/\big(2^\nu \Gamma(\nu+1)\big)$. Наостанок, отримуємо функцію Бесселя першого роду,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\,.$$

Другий (нескінченний при $x = 0$) розв'язок:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

(див. [7], [11] для деталей).

1.105. Доведення:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2}\,,$$

але $\Gamma(k+3/2) = \dfrac{(2k+1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}$, отже

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)!!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!(2k+1)!!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$
$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x\,.$$

Так само,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x\,.$$

1.107. У випадку функції Бесселя першого роду можемо записати

$$\begin{aligned}
J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{1}{\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} + \frac{1}{\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} \right] \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu/2} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} - \frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right) \right] \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\nu}{\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] = \nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \\
&= \frac{2\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)\,,
\end{aligned}$$

тут використано факт, що $\Gamma(k+\nu+1) - k\Gamma(k+\nu) = (k+\nu)\Gamma(k+\nu) - k\Gamma(k+\nu) = \nu\Gamma(k+\nu)$. Подібним чином можна довести й інші рекурентні співвідношення.

1.108. Ці співвідношення можна отримати як комбінації формул з задачі 1.107.

1.109. Доведення:
1) Розлянемо $n = 1$. Використовуючи рекурентне співвідношення $J'_\nu(x) = \dfrac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$, можемо переписати

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{xJ'_\nu(x) - \nu J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\,,$$

так що

$$\frac{d^n}{(xdx)^n}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = (-1)^n \frac{J_\nu(x)}{x^{\nu+n}}$$

Повторюючи цю процедуру n разів, отримуємо шукану формулу.
2) Аналогічно, розглянемо $n = 1$. Використовуючи рекурентне співвідношення $J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \dfrac{\nu}{x} J_\nu(x)$, отримуємо

$$\frac{d}{dx}\big(x^\nu J_\nu(x)\big) = x^{\nu-1}\big[xJ'_\nu(x) + \nu J_\nu(x)\big] = x^\nu J_{\nu-1}(x)\,.$$

1.110. Ці формули безпосередньо випливають із виразів, наведених у задачі 1.109 у випадку $n = 1$.

1.111. Поки

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

тоді

$$x^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} x^{\nu+k}\,.$$

Отже,

$$\frac{d}{dx}\big[x^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{x})\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu)}x^{\nu+k-1}$$

$$= x^{(\nu-1)/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+(\nu-1)+1)}\left(\frac{2\sqrt{x}}{2}\right)^{2k+\nu-1} = x^{(\nu-1)/2}J_{\nu-1}(2\sqrt{x})\,.$$

Другу формулу можна довести аналогічним чином.

1.112. Відповідь: 1) $x^\nu J_\nu + C$, 2) $-x^{-\nu}J_\nu + C$.

1.113.
1) Використовуючи $J_1(x) = -J_0(x)$, отримуємо

$$\int\limits_0^\infty J_1(x)\,dx = -J_o(x)\big|_{x=0}^{x=\infty} = J_o(0) = 1\,,$$

поки $J_\nu(\infty) = 0$ (див. асимтотичну формулу).
2) Аналогічно, використовуючи

$$\frac{1}{x}\,J_2(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\,J_1(x)\right]$$

(див. задачу 1.109) можемо записати, застосовуючи правило Лопіталя

$$\int\limits_0^\infty x^{-1}J_2(x)\,dx = \left.\frac{J_1(x)}{x}\right|_{x\to 0} = J_1'(0)\,.$$

Але згідно з рекурентним співвідношенням можемо записати наступне

$$J_1'(0) = -\left.\frac{J_1(x)}{x}\right|_{x=0} + J_o(0) = -J_1'(0) + J_o(0)\,,$$

отже $J_1'(0) = J_o(0)/2 = 1/2$.
3) Повторюючи описану процедуру n разів, отримуємо

$$\int\limits_0^\infty x^{-n}J_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n n!}\,.$$

1.114. Використовуючи рекурентне співвідношення $J_{n+2}(x) = \dfrac{n+1}{x}\,J_{n+1}(x) - J_{n+1}'(x)$, можемо переписати

$$\int\limits_0^\infty J_{n+2}(x)\,dx = -J_{n+1}(x)\big|_{x=0}^{x=\infty} + \int\limits_0^\infty \frac{n+1}{x}\,J_{n+1}(x)\,dx\,,$$

далі, підставляючи $J_{n+1}(x) = \dfrac{x}{n+1}\big(J_n(x) - J'_{n+1}(x)\big)$ з другого рекурентного співвідношення, отримуємо

$$\int_0^\infty J_{n+2}(x)\,dx = -2J_{n+1}(x)\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty J_n(x)\,dx\,.$$

Поки $J_n(x) \to 0$ при $x \to \infty$ отримуємо потрібне співвідношення.

1.115. Рівняння для $J_o(x)$ можна переписати у вигляді

$$J_o(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_o(x)}{dx}\right)\,,$$

тому:

$$\int_0^x xJ_o(x)\,dx = -\int_0^x \frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_o(x)}{dx}\right)\,dx = -x\frac{dJ_o(x)}{dx}\bigg|_0^x = xJ_1(x)$$

(оскільки $J'_o(x) = -J_1(x)$), та, інтегруючи частинами,

$$\begin{aligned}\int_0^x x^3J_o(x)\,dx = -\int_0^x x^2\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_o(x)}{dx}\right)\,dx = x^3J_1(x)\big|_0^x + 2\int_0^x x^2J'_o(x)\,dx \\ = x^2J_o(x) + (x^3-4x)J_1(x)\,.\end{aligned}$$

1.116. Відповідь:

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\big(\cos x - \sin x\big)\,, \quad J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\frac{3}{x^2-1}\right)\sin x - \frac{3}{x}\,\cos x\right]\,.$$

1.117. Розглянемо рівняння Бесселя

$$y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\,y(x) = 0\,.$$

У грубому наближенні $x \gg 1$ можемо знехтувати членами з множниками $1/x$ and $1/x^2$ так, що рівняння

$$y''(x) + y(x) = 0$$

має розв'язок $y(x) = ae^{\pm x}$. Точніше, $y(x) = a(x)e^{\pm ix}$ де $a(x)$ - це функція, яка повільно змінюється на нескінченності. Підставляючи цей вираз у рівняння Бесселя та припускаючи, що члени $a''(x)$, $a'(x)/x$, $a(x)/x^2$ є малими порівняно з $a'(x)$ and $a(x)/x$ отримуємо рівняння для $a(x)$

$$2a'(x) + \frac{1}{x}\,a(x) = 0\,,$$

так, що $a(x) = \dfrac{c}{\sqrt{x}}$ з $c =$ const. Загалом, константа c є комплексною. Отже, ми можемо записати дійсну частину розв'язку як

$$J_\nu(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(x + \alpha_\nu)\,,$$

де A та α_ν є дійсними константами (уявну частину можна проаналізувати аналогічним чином). Щоб знайти їх, давайте розглянемо рекурентні формули

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}\,J_\nu\,, \quad J_\nu'(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}\,J_\nu$$

при $x \to \infty$:

$$J_\nu'(x) \simeq J_{\nu-1}(x)\,, \quad J_\nu'(x) \simeq -J_{\nu+1}(x)\,.$$

Підставивши асимптотичну формулу, отримуємо $\alpha_{\nu\pm1} = \alpha_\nu \mp \pi/2$ або

$$\alpha_{\pm\nu} = \alpha_o \mp \frac{\pi}{2}\,.$$

Порівнюючи вираз для $J_\nu(x)$ with $J_{1/2}(x)$ знаходимо, що $\alpha_o = -\pi/4$, $A = (2/\pi)^{1/2}$. Остаточно,

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{x}\right)$$

(вираз для $N_\nu(x)$ включає синус замість косинуса).

1.118. Ці вирази безпосередньо випливають з визначення $H_\nu^{(1,2)} = J_\nu \pm iN_\nu$ та асимптотичних виразів для J_ν and N_ν (див. задачу 1.117). Результат

$$H_\nu^{(1,2)}(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \exp\left[\pm\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{x}\right)\right]\,.$$

1.119. Спочатку знайдемо $W[J_\nu, J_{-\nu}]$ використовуючи формули

$$J_\nu(x) = \int\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = x^\nu \left[\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} + \ldots\right]\,,$$

$$J_{-\nu}(x) = \int\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} = x^{-\nu} \left[\frac{1}{2^\nu\Gamma(1-\nu)} + \ldots\right]\,,$$

де $(\ldots)$ позначає поліном порядку 2 або вище. Поки

$$J_\nu{}'(x) = \nu x^{\nu-1} \left[\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} + \ldots\right]\,, \quad J_{-\nu}{}'(x) = -\nu x^{-\nu-1} \left[\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)} + \ldots\right]\,,$$

отримуємо

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x) = -\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{x} + (\dots)\,,$$

де $(\dots)$ позначає частину суми з додатніми степенями x. Згідно з теоремою Ліувіля[5] можемо очікувати, що $W[J_\nu, J_{-\nu}] = \mathrm{const}/x$, отже, усі члени, позначені $(\dots)$ зникають (це можна довести, написавши повні суми, але ми залишаємо це читачу в якості вправи). Використовуючи властивості

$$\Gamma(1+\nu) = \nu\Gamma(\nu)\,, \quad \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin \pi\nu}$$

отримуємо:

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{x} = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{x} = -\frac{2}{\pi x}\,\sin\pi\nu\,.$$

Поки $N_\nu(x) = J_\nu(x)\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu + J_{-\nu}(x)\sin^{-1}\pi\nu$ тоді

$$W[J_\nu(x), N_\nu(x)] = W[J_\nu(x), J_{-\nu}(x)]\sin^{-1}\pi\nu = -\frac{2}{\pi x}\,.$$

1.120. Давайте запишемо рівняння для $J_\nu(k_1 x)$ та $J_\nu(k_2 x)$ для деяких $k_{1,2} = \mathrm{const}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_1 x)}{dx}\right] + \left(k_1^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(k_1 x) = 0\,,\\
\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_2 x)}{dx}\right] + \left(k_2^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(k_2 x) = 0\,.
\end{aligned}$$

Помноживши перше рівняння на $xJ_\nu(k_2 x)$, друге рівняння на $xJ_\nu(k_1 x)$ та віднявши результати, отримаємо

$$(k_1^2 - k_2^2)xJ_\nu(k_1 x)J_\nu(k_2 x) = \frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(k_2 x)\frac{dJ_\nu(k_1 x)}{dx} - xJ_\nu(k_1 x)\frac{dJ_\nu(k_2 x)}{dx}\right]\,.$$

Остаточно, інтегруючи по $[a, b]$ відносно x приходимо до бажаного результату.

1.121. Давайте перепишемо рівняння Бесселя у вигляді $x^2 J_\nu = \nu^2 J_\nu - x^2 J_\nu{}'' - x J_\nu{}'$.

[5] коли $y_{1,2}$ є незалежними розв'язками рівняння $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, then $W[y_1, y_2] = \mathrm{const}\cdot\exp\left[-\int p(x)\,dx\right]$

Далі розглянемо невизначений інтеграл, використовуючи формулу:

$$
\begin{aligned}
I(x) = \int xJ_\nu^2(kx)\,dx = \Big|t = kx\Big| = \frac{1}{k^2}\int tJ_\nu^2(t)\,dt \\
=& \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{2}\,t^2J_\nu^2(t) - \int J_\nu(t)J_\nu{}'(t)t^2\,dt\right] \\
=& \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{2}\,t^2J_\nu^2(t) - \int J_\nu{}'\big(\nu^2J_\nu - t^2 - J_\nu{}'' - tJ_n{}'\big)\right] \\
=& \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{2}\,t^2J_\nu^2(t) - \int\left(\frac{\nu^2}{2}\frac{d}{dt}\big(J_\nu{}^2\big) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(t^2J_\nu{}'\big)\,dt\right)\right] \\
=& \frac{1}{2k^2}\big(t^2 - \nu^2\big)J_\nu^2(t) + \frac{t^2}{2k^2}\left[J_\nu{}'(t)\right]^2,
\end{aligned}
$$

або, підставляючи $t = kx$,

$$
\int xJ_\nu^2(kx)\,dx = \frac{x^2}{2}\big[J_\nu{}'(kx)\big]^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\nu^2}{k^2}\right)J_\nu^2(kx)\,.
$$

Зробивши цей інтеграл визначеним, ми отримуємо потрібну формулу.

1.122. Використовуючи правило Лопіталя, можемо переписати

$$
\begin{aligned}
\int\limits_a^b [J_\nu{}'(kx)^2]^2\,dk = \lim_{k'\to k}\frac{1}{k'^2 - k^2}\Big[xJ_\nu(kx)J_\nu{}'(k'x) - xJ_\nu(k'x)J_\nu{}'(kx)\Big]_{x=a}^{x=b} \\
= \frac{1}{2k}\Big[x^2J_\nu(kx)J_\nu{}''(kx) - x^2\big[J_\nu{}'(kx)\big]^2\Big]_{x=a}^{x=b}
\end{aligned}
$$

Підставляючи $x^2J_\nu''(kx) = xJ_\nu{}'(kx) - (k^2x^2 - \nu^2)J_\nu(kx)$, отримуємо (1.72).

1.123. Припустимо, що функція $J_\nu(x)$ (при $\nu > -1$) має комплексні корені. Тоді $J_\nu(\mu) = 0$ для деяких $\mu = a + bi$ та $J_\nu(\mu) = J_\nu(\mu^*) = 0$ (функція $J_\nu(x)$ може бути записана у вигляді степеневого ряду з дійсними коефіцієнтами). Позначаючи $k_1 = \mu/a$, $k_2 = \mu^*/a$, можемо записати

$$
\int\limits_0^a xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)\,dx > 0
$$

поки $J_\nu(k_1x) = J_\nu(k_2x)^*$. Але $k_1 \neq k_2$ та згідно до (1.73) права частина має бути рівною нулеві. Ця суперечність доводить твердження.

1.124. Нехай $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_nJ_\nu(k_nx)$, де $k_n = x_{\nu,n}/a$. Помноживши обидві частини на $xJ_n(k_{\nu,n}x)$ і інтегруючи по $[0, a]$ відносно x отримуємо (1.75).

1.125. Давайте підставимо

$$a_n = \frac{1}{\frac{a^2}{2}\big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2} \int\limits_0^a x f(x) J_\nu(k_{\nu,n}x)\, dx$$

в

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(k_{\nu,n}x)$$

отримаємо:

$$f(x) = \frac{2}{a^2} \int\limits_0^a dr\, x' f(x') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2}\, J_\nu(k_{\nu,n}x) J_\nu(k_{\nu,n}x')\,,$$

отже

$$\frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(k_{\nu,n}x) J_\nu(k_{\nu,n}x')}{\big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2} = \frac{1}{x}\, \delta(x - x')\,.$$

1.126. Давайте перепишемо формулу для a_n:

$$\frac{a^2}{2}\, \big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2 a_n = \int\limits_0^\infty x f(x) J_\nu(k_{\nu,n}x)\, dx\,.$$

Коли $a \to \infty$ параметр $k_{\nu,n} = x_{\nu,n}/a$ стає неперервним, $k_{\nu,n} \to k$. Позначимо

$$\frac{a^2}{2}\, \big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2 a_n = \hat{f}(k_{\nu,n}) \to \hat{f}(k) \quad \text{as} \quad a \to \infty\,.$$

Далі, запишемо $f(x)$ у вигляді суми Дарбу:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu(k_{\nu,n}x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(k_{\nu,n}) J_\nu(k_{\nu,n}x) \frac{1}{\frac{a^2}{2}\, \big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2}$$

Коли $a \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\dots) \Delta k_{\nu,n} \to \int\limits_0^\infty (\dots)\, dk\,, \quad \Delta k_{\nu,n} = \frac{k_{\nu,n+1} - k_{\nu,n}}{a} \to dk\,.$$

Щоб переписати $f(x)$ у такому вигляді, необхідно знайти вираз для $\Delta k_{\nu,n}$. У нашому випадку

$$\Delta k_{n,\nu} = \frac{2}{a^2 k_{\nu,n} \big[J_{\nu+1}(k_{\nu,n}a)\big]^2}$$

(див. [11]). Отже,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{\nu,n} \hat{f}(k_{\nu,n}) J_\nu(k_{\nu,n} x) \Delta k_{\nu,n} \to \int_0^\infty k \hat{f}(k) J_\nu(kx)\, dk\,.$$

Зауважте, що простіший спосіб довести ці формули без використання теорії міри наведений у задачі 1.137.

1.127. Підставивши $f(x)$ в $\hat{f}(k)$ in 1.77, отримаємо

$$\hat{f}(k) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(kx)\, dx = \int_0^\infty dk'\, k' \hat{f}(k') \int_0^\infty x J_\nu(kx) J_\nu(k, x)\, dx = \int_0^\infty \hat{f}(k') \delta(k-k')\, dk'\,,$$

(тут $k, k' > 0$), таким чином, що

$$\int_0^\infty x J_\nu(kx) J_\nu(kx)\, dx = \frac{1}{k}\, \delta(k - k')\,.$$

1.128. Коефіцієнти a_n :

$$\frac{a^2}{2} \left[J_{\nu+1}(k_{\nu,n} a)\right]^2 a_n = \int_0^a r^{\nu+1} J_\nu(k_{\nu,n} r)\, dr\,,$$

де $J_\nu(k_{\nu,n} a) = 0$, $k_{\nu,n} a = x_{\nu,n}$. Використовуючи властивість $x^{\nu+1} J_\nu(x) = \dfrac{d}{dx}\left[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right]$, отримуємо

$$\frac{a^2}{2} \left[J_{\nu+1}(k_{\nu,n} a)\right]^2 a_n = a^{\nu+2} J_{\nu+1}(x_{\nu,n})\,,$$

таким чином,

$$x^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a^\nu J_\nu(k_{\nu,n} x)}{J_{\nu+1}(k_{\nu,n}) a}\,.$$

1.129. Давайте перепозначимо $u(r) = R_n(k_{n,i} r)$, $v(r) = R_n(k_{n,j} r)$, а гранична умова $R_n(k_{n,j} a) = 0$. Рівняння для u and v мають вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \left(k_{n,i}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) u = 0\,,$$
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) + \left(k_{n,j}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) v = 0\,.$$

Помноживши ці рівняння на rv and ru, далі віднявши результати та проінтегрувавши по $[0, a]$ відносно r, отримуємо

$$(k_{n,i}^2 - k_{n,j}^2)\int\limits_0^a ru(r)v(r)\,dr = -\int\limits_0^a \left[v\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) - u\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\right]$$
$$= -a\big[k_{n,i}R_n(k_{n,i}a){R_n}'(k_{n,j}a) - k_{n,j}R_n(k_{n,j}a){R_n}'(k_{n,i}a)\big] = 0\,,$$

коли $i \neq j$.

У випадку $i = j$ помноживши рівняння для $R_n(k_{n,i}r) = R_n(x)$ на $r^2\dfrac{dR_n}{dr}$ та проінтегрувавши по r, отримуємо потрібний вираз.

1.130. Щоб змінити вираз, вибираємо так $k_{n,i}$, щоб $R_n(k_{n,i}a) = R_n(k_{n,i}b) = 0$. Усі інтеграли $\int_0^a(\dots)$ будуть замінені на $\int_a^b(\dots) = \int_0^b(\dots) - \int_0^a(\dots)$.

1.131. Починаємо з

$$J_\nu(x) = \int\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\,.$$

Поки $\Gamma(k+1)\Gamma(k+1/2) = \sqrt{\pi}(2k)!/2^{2k}$ можемо переписати загальний член у розкладі $J_\nu(x)$ як

$$\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1/2)}$$
$$= \frac{(-1)^k x^{2k}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\frac{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu+k+1)}$$
$$= \frac{(-1)^k x^{2k}}{\sqrt{\pi}(2k)!\Gamma(\nu+1/2)}\,2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2\nu}\varphi\sin^{2k}\varphi\,d\varphi\,,$$

де, використали тот факт, що

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((m+n+2)/2)}\,.$$

Підставляючи в розклад ряду, отримуємо

$$
\begin{aligned}
J_\nu(x) =& \frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu}\varphi \sin^{2k}\varphi \, d\varphi \\
=& \frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x\sin\varphi)^{2k}}{(2k)!} \, d\varphi \\
=& \frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} x \cos(x\sin\varphi) \, d\varphi \,.
\end{aligned}
$$

1.132. Поки

$$
\exp\left(\frac{1}{2}\,tx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot t^n \,, \quad \exp\left(-\frac{1}{2t}\,x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{t^n} \,,
$$

тоді

$$
\exp\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \,,
$$

де

$$
\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n t^{n-2k} \,.
$$

Отже

$$
\exp\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n t^{n-2k} =
$$

Змінюючи n на $n = m + 2k$, $m = \overline{-\infty,\infty}$, отримуємо

$$
\exp\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)x\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x) \,.
$$

1.133. Підставляючи $t = e^{i\varphi}$ в (1.83). Беручи дійсну та уявну частини, можемо переписати цей результат у вигляді

$$
\cos\bigl(x\sin\varphi\bigr) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos n\varphi \,, \quad \sin\bigl(x\sin\varphi\bigr) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\varphi \,.
$$

1.134. Беручи похідну від $F(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$ по x та використовуючи (1.82), отримуємо

$$
\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n {J_n}'(x) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) F(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+1} J_n(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-1} J_n(x) \,.
$$

Змінюючи лічильник у праій частині, отримуємо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n {J_n}'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n-1}(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n+1}(x)\,.$$

Остаточно, порівнюючи коефіцієнти при різних степенях t, отримуємо

$$2{J_n}'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\,.$$

Так само, диференціюючи $F(x,t)$ відносно t, отримуємо:

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n-1} J_n(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x) + \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-2} J_n(x)$$

Така сама процедура призводить до відношення

$$\frac{2(n+1)}{x}\, J_{n+1}(x) = J_n(x) + J_{n+2}\,.$$

Комбінуючи ці співвідношення, приходимо до звичайних рекурентних співвідношень (див. задачу 1.108).

1.135. Маємо:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y)t^n = \exp\left[\frac{x+y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\cdot\exp\left[\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(y)t^n\,,$$

помножуючи розклади у правій частині, отримуємо потрібну формулу.

1.136. Хоча для цілих n функції Бесселя не є незалежними, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, можемо переписати

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = J_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\big[t^n + (-1)^n t^{-n}\big]\,.$$

Коли $t = e^{i\varphi}$, $t - 1/t = 2i\sin\varphi$, останній вираз можна переписати як

$$e^{ix\sin\varphi} = J_o(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\big[e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}\big]\,.$$

Помноживши обидві сторони на $e^{im\varphi}$ та інтегруючи відносно φ від $[-\pi,\pi]$, з урахуванням того, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{mn}$$

приходимо до (1.84).

1.137. Давайте запишемо подвійне перетворення Фур'є для $g(x,y)=f(r)e^{in\varphi}$:

$$\hat g(k_x,k_y)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{i(k_xx+k_yy)}dx\,dy\,,\quad g(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\hat g(k_x,k_y)e^{-i(k_xx+k_yy)}dk_x\,dk_y\,.$$

У полярній системі координат

$$x=r\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\varphi\,,$$
$$k_x=k\cos\alpha\,,\quad k_y=k\sin\alpha\,,$$

можемо переписати зображення $\hat g(k_x,k_y)=\hat g(k,\alpha)$ як

$$\hat g(k,\alpha)=\int\limits_0^\infty r\,dr\int\limits_0^{2\pi} g(r,\varphi)e^{ik\cos(\varphi-\alpha)}\,.$$

Роблячи заміну $\varphi'=\pi/2-(\varphi-\alpha)$ і використовуючи визначення функції $g(r,\varphi)$, отримуємо, використовуючи інтеграл (1.84):

$$\hat g(k,\alpha)=e^{in(\alpha+\pi/2)}\int\limits_0^\infty f(r)r\,dr\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikr\cos\varphi-in\varphi}d\varphi$$
$$=2\pi e^{in(\alpha+\pi/2)}\int\limits_0^\infty rf(r)J_n(kr)\,dr=2\pi e^{in(\alpha+\pi/2)}\hat f(k)$$

(діапазон в останньому інтегралі зменшується до $[-\pi,\pi]$ оскільки функція під знаком інтегралу є періодичною[6]). Тут позначимо

$$\hat f(k)=\int\limits_0^\infty rf(r)J_n(kr)\,dr\,.$$

Далі, давайте підставимо цей результат у зворотню формулу для $g(x,y)$:

$$g(x,y)\equiv f(r)e^{in\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty k\hat f(k)\,dk\int\limits_0^{2\pi} d\alpha\,e^{-ikr\cos(\alpha-\varphi)+in\alpha+i\pi n/2}\,.$$

Змінюючи змінну α на $\alpha=\varphi-\alpha'-\pi/2$ отримуємо, аналогічно до попереднього:

$$f(r)e^{in\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty k\hat f(k)\,dk\int\limits_0^{2\pi} d\alpha\,e^{ikr\sin\alpha-in\alpha+in\varphi}=e^{in\varphi}\int\limits_0^\infty k\hat f(k)J_n(kr)\,dk\,,$$

[6] якщо $f(x+T)=f(x)$ то $\int_0^T f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ для $a-b=T$. Це тривіальна властивість періодичних функцій, які інтегруються протягом свого періоду.

таким чином, що

$$f(r)=\int\limits_0^\infty k\hat{f}(k)J_n(kr)\,dk\,,\quad \hat{f}(k)=\int\limits_0^\infty rf(r)J_n(kr)\,dr\,.$$

1.138. Змініть змінну $t=\sin\varphi$ у (1.84) для $n=0$.

1.139. 1) Поки

$$J_o(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{[n!]^2}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

можемо переписати інтеграл як

$$\int\limits_0^{\pi/2}J_o(x\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{[n!]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi\,,$$

Але

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,B\big(1/2,n+1\big)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}=\frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\,,$$

отже,

$$\int\limits_0^{\pi/2}J_o(x\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n}=\frac{\sin x}{x}\,.$$

2) Так само,

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

таким чином, що

$$\int\limits_0^{\pi/2}J_1(x\cos\varphi)\,d\varphi=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\,\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}\varphi\,d\varphi=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\,x^{2n+1}=\frac{1-\cos x}{x}\,.$$

1.140. Використовуючи інтеграл Бесселя

$$J_o(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$$

отримуємо

$$\int\limits_0^\infty e^{-kz}J_o(kr)\,dk=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dk\,\int\limits_0^\pi e^{-kz}\cos(kr\sin\varphi)\,d\varphi\,.$$

Поки

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,,$$

можемо продовжити це обчислення, змінюючи порядок інтегрування, як

$$\int\limits_0^\infty e^{-kz}J_o(kr)\,dk = \frac{2}{\pi z}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{1+(r^2/z^2)\sin^2\varphi} = \big|t=\operatorname{tg}\varphi\big| = \frac{2}{\pi z}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+(1+r^2/z^2)t^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\,.$$

1.141. Використовуйте результати задачі 1.140 для $z\to iz$. Другий спосіб полягає у прямому обчисленні, як у задачі 1.140.

1.142. Використовуйте результати задачі 1.141.

1.143.

1.144. Використовуючи представлення

$$J_o(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\varphi}d\varphi$$

можемо переписати

$$\int\limits_0^\infty e^{-x\cos\theta}J_o(x\sin\theta)x^n\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^\infty x^n e^{-x(\sin\theta+i\cos\theta\sin\varphi)}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\frac{d^n}{da^n}\int\limits_0^\infty e^{-x(\sin\theta+i\cos\theta\sin\varphi)}\,dx = \frac{(-1)^n n!}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi\frac{d^n}{d(\sin\theta)^n}\frac{1}{(\sin\theta+i\cos\theta\sin\varphi)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{\big(\sin\theta+i\cos\theta\sin\varphi\big)^{n+1}} \equiv \Gamma(n+1)P_n(\cos\theta)$$

згідно з формулою Лапласа.

1.152. Роблячи заміну $x=\sin\varphi$, отримуємо

$$\int\limits_0^{\sin\varphi}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \left|\begin{matrix} t=\sin\varphi \\ dt|_0^{\sin\varphi} = \cos\varphi\,d\varphi|_0^\varphi\end{matrix}\right| = \int\limits_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

1.153. Така ж заміна, як і в задачі 1.152.

1.154. Виконуючи вказані заміни, отримуємо:

$$\int\limits_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\varphi}} = \left| \sin x = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}, \quad d\varphi = \frac{\sin\alpha\cos x}{\left[1-\sin^2\alpha\sin^2 x\right]^{1/2}} \right|$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left[1-\sin^2\alpha\sin^2 x\right]^{1/2}} = K(\sin\alpha)\,.$$

Таким же методом можна довести формулу

$$\int\limits_0^\varphi \frac{dx}{\left[\sin^2\alpha - \sin^2 x\right]^{1/2}} = F\left(\arcsin\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}, \sin\alpha\right)\,.$$

1.155. Розкладаючи функцію за степенями $k<1$ та інтегруючи по x, отримуємо

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left[1-k^2\sin^2 x\right]^{1/2}} = \int\limits_0^{\pi/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,k^{2n}\sin^{2n}x\right]dx\,.$$

Поки

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,,$$

таким чином, що

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2}\,k^{2n}\right] = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots\right]\,.$$

Аналогічна процедура призводить до (1.104).

1.156. Роблячи те ж саме, що і в задачі 1.155, отримуємо

$$F(\varphi,k) = \int\limits_0^\varphi d\theta\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}k^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\sin^{2n}\theta\right] = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty}k^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,k^{2n}\int\limits_0^\varphi \sin^{2n}\theta\,d\theta$$

$$=\varphi + \frac{k^2}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \dots\,,$$

$$E(\varphi,k) = \int\limits_0^\varphi d\theta\left[1-\frac{k^2}{2}\,\sin^2\theta - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,k^{2n}\sin^{2n}\theta\right] = \varphi - \frac{k^2}{2}\int\limits_0^\varphi \sin^2\theta\,d\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,k^{2n}\int\limits_0^\varphi \sin^{2n}\theta\,d\theta = \varphi - \frac{k^2}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \dots\,.$$

1.157. Беручи похідну від $E(k)$ відносно k, отримуємо

$$\frac{dE(k)}{dk}=\frac{d}{dk}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi=-2k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi\equiv\frac{E(k)-K(k)}{k}\,.$$

Далі, інтегруючи за частинами вираз для dE/dk, отримуємо

$$\frac{dE}{dk}=-\,k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=k\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\left[1-k^2\sin^2\varphi\right]^{1/2}}\Bigg|_0^{\pi/2}-k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{\left[1-k^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}$$
$$\equiv k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\left[1-k^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}-k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left[1-k^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}\,.$$

Але

$$\frac{dK}{dk}=\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{k^2\sin^2\varphi-1+1}{\left[1-k^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}=-\frac{1}{k}\,K(k)+\frac{1}{k}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left[1-k^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}\,,$$

таким чином, що

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left[1-k^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}=k\frac{dK}{dk}+K\,.$$

Отже,

$$\frac{dE}{dk}=\frac{dK}{dk}-k\left(K+k\frac{dK}{dk}\right)\equiv\frac{E-K}{k}$$

відповідно до попереднього результату. Остаточно,

$$\frac{dK}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{K}{k}\,.$$

1.158. Використовуючи результат задачі 1.157, можемо записати

$$\frac{d^2E}{dk^2}=\frac{d}{dk}\frac{E-K}{k}==-\frac{1}{k}\frac{\partial K}{\partial k}\,.$$

Але $K=E-kE'$, таким чином

$$\frac{d^2E}{dk^2}=-\frac{1}{k^2}\frac{E}{1-k^2}+\frac{K}{k^2}=-\frac{E}{1-k^2}-\frac{E'}{k^2}\,,$$

або

$$(1-k^2)\frac{d}{dk}\left(k\frac{dE}{dk}\right)+kE=0\,.$$

Рівняння для $K(k)$ можна отримати подібним способом.

1.159. Коли $k = 0$, можемо записати

$$x = \int\limits_0^{\mathrm{am}\,(x,0)} d\varphi = \mathrm{am}\,(x,0)\,,$$

отже,

$$\mathrm{sn}\,(x,0) = \sin\,\mathrm{am}\,(x,0) = \sin x\,, \quad \mathrm{cn}\,(x,0) = \cos\,\mathrm{am}\,(x,0) = \cos x\,, \quad \mathrm{dn}\,(x,0) = 1\,.$$

Коли $k = 1$, отримуємо

$$x = \int\limits_0^{\mathrm{am}\,(x,1)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{am}\,(x,1)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\,,$$

таким чином, що

$$\mathrm{am}\,(x,1) = 2\,\mathrm{arctg}\,e^x - \frac{\pi}{2}\,.$$

Це означає,

$$\mathrm{sn}\,(x,1) = \sin\,\mathrm{am}\,(x,1) = \sin\bigl(2\,\mathrm{arctg}\,e^x - \pi/2\bigr) = -\cos 2\,\mathrm{arctg}\,e^x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \mathrm{th}\,x\,,$$

так само,

$$\mathrm{cn}\,(x,1) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\,, \quad \mathrm{dn}\,(x,1) = \sqrt{1-\,\mathrm{sn}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} \equiv \mathrm{cn}\,x\,.$$

1.160. Отримуємо:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{sn}\,(x,k) = \frac{d}{dx}\sin\,\mathrm{am}\,(x,k) = \cos\,\mathrm{am}\,(x,k)\frac{d}{dx}\,\mathrm{am}\,(x,k) \equiv= \mathrm{cn}\,(x,k)\,\mathrm{dn}\,(x,k)\,,$$

поки

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{am}\,(x,k) = \left[\frac{d}{d\varphi}F(\varphi,k)\right]^{-1}_{\varphi=\,\mathrm{am}\,(\varphi,k)} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\Big|_{\varphi=\,\mathrm{am}\,(x,k)} = \mathrm{dn}\,(x,k)\,.$$

Так само,

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{cn}\,(x,k) = -\,\mathrm{sn}\,(x,k)\,\mathrm{dn}\,(x,k)\,, \quad \frac{d}{dx}\,\mathrm{dn}\,(x,k) = -k^2\,\mathrm{sn}\,(x,k)\,\mathrm{cn}\,(x,k)\,.$$

1.161. Доведення є прямим за допомогою стандартної формули $(1-\varepsilon)^{-1} = 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots$ для похідних функцій, що є оберненими одна одній.

1.162. Доведення є прямим, тобто співпадає з простим розкладом Тейлора для суперпозиції функцій.

References

[1] Дж. Джексон, *Классическая электродинамика*, “Мир”, 1965.

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, “Наука”, 1967.

[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, “Наука”, 1957.

[4] В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, ИЛ, 1954.

[5] Дж. А. Стрэттон, *Теория электромагнетизма*, Гостехиздат, 1948.

[6] Ф. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики, I*, ИЛ, 1958.

[7] Дж. Метьюз, Р. Уокер, *Математические методы физики*, “Мир”, 1958.

[8] Э. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, *Курс современного анализа, II*, ИЛ, 1964.

[9] В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, “Наука”, 1970.

[10] Ледней М.Ф., Разумова М.А., Романенко О.В., Хотяїнцев В.М, *Збірник задач з векторного і тензорного аналізу*, К.: “Київський університет”. – 2002, 118 с.

[11] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, 1970.

[12] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм и произведений*, ФМ, 1962.

[13] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции*, “Наука”, 1977.